Eine Theorie komplexwertiger Abelscher Limitierungsmethoden

DISSERTATION

VON

HIERONYMUS FISCHER

FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK

DER FERNUNIVERSITÄT HAGEN

Die Erstellung dieser Arbeit wurde betreut von

Herrn Prof. Dr. Wolfgang Beekmann

Lehrgebiet Analysis

Juli 1987

Hieronymus Fischer
Georg-Friedrich-Händel-Str. 7
7778 Markdorf

Ich danke Herrn Professor Beekmann
für seine wertvollen Anregungen, die vielen nützlichen Hinweise
und die stets freundliche und entgegenkommende Unterstützung

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1 Überblick

Ausgehend von einer geeigneten Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

definieren wir — zunächst noch ganz formal — *Limitierung* durch ein *Potenzreihenverfahren* über die Zuordnung

$$\lim_{n\to\infty} s_n := \lim_{z\to r} \frac{1}{P(z)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n z^n$$

Hierbei ist (s_n) irgendeine komplexe Zahlenfolge. In der englisch-sprachigen Literatur findet man als Entsprechung die Bezeichnung "power method" (vgl. BIRKHOLC [5], ZIV [34] oder BORWEIN [6]).

Unsere Vereinbarung läßt sich von zwei verschiedenen Ansatzpunkten aus motivieren. Setzt man $P(z)=(1-z)^{-\alpha-1}$ und $r=1$, so haben wir die auf BORWEIN [7] zurückgehende Verallgemeinerung A_α des gewöhnlichen Abel-Verfahrens $A=A_0$ (vgl. ZELLER - BEEKMANN [33], 55, S. 110 und Erg. 67, S. 186). Dagegen erhalten wir für $P(z)=e^z$ und $r=\infty$ das Borel-Verfahren (s. [33], 66, S. 134 oder auch HOISCHEN [20]). Letztere Verfahrensklasse wird hier nicht behandelt, denn dies würde den gesteckten Rahmen bei weitem sprengen.

Gegenstand dieser Arbeit sind die Verfahren mit $0<r<\infty$ (Abel-ähnliche oder kurz *Abelsche* Verfahren). Wie die simple Parametersubstitution $z=r\cdot w$ lehrt, dürfen wir uns hierbei auf $r=1$ beschränken. In der Literatur werden beim Grenzübergang $z\longrightarrow r$ bzw. $z\longrightarrow 1$ im allgemeinen lediglich reelle Werte zugelassen. Nur vereinzelt, etwa beim klassischen Satz von Stolz zur Permanenz des Abel-Verfahrens bei Annäherung an +1 innerhalb eines sogenannten Stolz'schen Winkelraums (Erweiterung des Abelschen Grenzwertsatzes) oder bei SRIDHAR [30] und BUSTOZ [13], die ebenfalls Stolz'sche Winkel zugrundelegen, wird von dieser "Regel" abgewichen. Einige Autoren benutzen zwar analytische Eigenschaften der zu limitierenden Hilfsfunktion in gewissen Gebieten mit dem Randpunkt r bzw. 1, doch spielt deren lokales Verhalten in der Nähe des Randpunktes und abseits der reellen Achse selten eine Rolle. In den allermeisten Fällen kommen nur global-analytische Eigenschaften zum Zuge. Als Beispiel hierfür sei auf BIRKHOLC [3], [4] und [5] verwiesen. Gerade die Behandlung von Grenzübergängen in echt komplexwertigen Teilmengen des Einheitskreises (verallgemeinerte Stolz-Gebiete) ist hingegen das Thema der vorliegenden Arbeit. Hierzu werden einige neue Termini, wie Randfunktion, holomorphe Randabstandsfunktion oder PE-Folge eingeführt sowie die oben gefaßte Definition der Limitierung durch Potenzreihenverfahren präzisiert und der Problematik angepaßt.

Wie schon angedeutet — und wohl auch hinlänglich bekannt — werden herkömmliche Stolz-Gebiete durch zwei sich im Punkt $z=+1$ unter einem Winkel kleiner als π schneidende Geradenstücke bestimmt (Stolz'scher Winkelraum). Da bei der Limitierung $z \longrightarrow 1$ eigentlich nur Punkte in unmittelbarer Nähe des Randpunktes $z=+1$ interessieren, führt man oft noch eine Begrenzung des Winkelraumes auf Werte $|z| \geq 1-\delta$, $\delta>0$, ein und spricht dann von Stolz'schen Dreiecken.

Bestimmende Elemente einer konventionell verstandenen Stolz-Menge sind also zwei symmetrisch zur x-Achse liegende Geradenstücke, die sich im Punkt $z=+1$ schneiden und die eben angesprochene Begrenzung. Letztere wollen wir in unsere Definition verallgemeinerter Stolz-Mengen übernehmen. An die Stelle von Geradenstücken — im Sinne einer funktionalen Auffassung also linearen Funktionen — lassen wir jedoch allgemeinere Kurvenstücke treten. Um funktionentheoretische Hilfsmittel möglichst frühzeitig und direkt in die Diskussion einbringen zu können, verwenden wir indes nicht den von der Anschauung induzierten differentialgeometrischen Kurvenbegriff, sondern beziehen uns auf eine Klasse reeller bzw. komplexer Funktionen und fassen das Bild eines Intervalls der x-Achse unter einer relevanten Funktion (Graph) als Begrenzungslinie (Rand) einer verallgemeinerten Stolz-Menge auf. Hiermit haben wir eine begriffliche Vorstellung dessen umrissen, was wir im folgenden ***Randfunktion*** nennen und dessen, was wir unter einer ***verallgemeinerten Stolz-Menge*** verstehen (Die exakten Definitionen werden weiter unten gegeben). In diesem Sinne können wir einen gewöhnlichen Stolz'schen Winkelraum mit dem Öffnungswinkel $\Theta<\pi$ durch eine Randfunktion $R(x)=x\cdot\tan\Theta/2$ charakterisieren. Nun liegen Verallgemeinerungen auf der Hand. Wählen wir etwa $R(x)=x^2$, so könnten wir von einem "Parabelraum" sprechen, usw.

Da nun hinreichend klar sein dürfte, in welcher Weise die reellwertige Limitierung Abelscher Potenzreihenverfahren in Richtung komplexwertiger Limitierung verallgemeinert wird, sei noch etwas zur Methodik und den Ergebnissen bemerkt.

Wie bereits oben kurz angesprochen, gibt es kaum Literaturstellen, die das Thema dieser Arbeit, nämlich Definition einer Systematik und Bildung einer Theorie zur Behandlung komplexwertiger Limitierung mit Abelschen Potenzreihenverfahren, essentiell berühren. Daher ist es nicht verwunderlich, daß zur Lösung der anstehenden Probleme z. T. neuartige Ansätze gefaßt und unübliche Wege beschritten werden mußten. Lediglich bei direkt mit Momentenfolgen zusammenhängenden Sätzen konnten ausgetretene Pfade begangen werden. Einer der neu angelegten Wege zur Behandlung von Vergleichssätzen beginnt mit der Untersuchung von "Differentialtransformationen" zwischen geeigneten Potenzreihenverfahren, einer jener neuartigen Ansätze stützt sich z. B. auf den Begriff der *holomorphen Randabstandsfunktion*, darunter wird eine holomorphe Funktion verstanden, die für ein geeignetes verallgemeinertes Stolz-Gebiet zu jedem Punkt z aus diesem Gebiet bis auf einen von z unabhängigen Faktor den Abstand von z zum Rand des Gebietes angibt. Letztere Begriffsbildung ist der Ausgangspunkt für eine Reihe von weiteren Überlegungen, die schließlich zu einer Anwendung der Cauchy'schen Ungleichungen für Ableitungen führen. Darauf basierend beweisen wir einen Satz über den Vergleich von Potenzreihenverfahren bei komplexwertiger Limitierung. Typischerweise werden zur Formulierung dieses und weiterer Sätze Begriffe benötigt, die an dieser Stelle entweder garnicht oder nicht in der notwendigen Exaktheit vermittelt werden können. Nur soviel sei vorweggenommen, die auftretenden Anwendbarkeitsvoraussetzungen sind stets von der Art einer Wachstums- oder Größenordnungsbedingung an Ableitungen der beteiligten, durch Potenzreihen bestimmten Funktionen (z.B. P wie oben), oft in Relation zu den zugrundegelegten Randfunktionen. Die bewiesenen Tauber-Sätze beziehen sich fast ausnahmslos auf Tauberbedingungen eines neuen, in der Literatur nicht belegten Typs (Ableitungen der zu limitierenden Hilfsfunktion).

Die eher abstrakten Resultate des Hauptteils (Kapitel 3) werden im anwendungsorientierten letzten Kapitel sämtlich mit konkreten Inhalten ausgefüllt. Ein wichtiges Ergebnis aus diesem Feld ist der Äquivalenzsatz $A_\alpha \approx A_\beta$ für die BORWEIN'sche Verallgemeinerung der Abel-Verfahren bei Limitierung in gewöhnlichen Stolz-Mengen, ein weiteres, der Permanenzsatz für das logarithmische Verfahren L, der etwa besagt, daß eine konvergente Folge (s_n) auch durch L limitiert wird, nur vorausgesetzt, z bleibt beim Grenzübergang $z \longrightarrow 1$ signifikant innerhalb des Einheitskreises. Ebenfalls bedeutsam sind die Aussagen zur Beziehung von Gronwall- und Abel-Verfahren. Wir verifizieren in diesem Zusammenhang Verschärfungen zweier Sätze von BUSTOZ [13], insbesondere geben wir deutlich kürzere Beweise derselben und fügen die Behauptungen erfolgreich in den allgemeineren Rahmen der formulierten Theorie ein.

Ein Wort noch zu den Grundlagen der Theorie. Diese wird im zweiten Kapitel fundiert aufgebaut. Darüber hinaus werden auch Fragestellungen behandelt, die dem Wesen nach grundlegend neu sein müssen, da sie die gegenseitige Einflußnahme zwischen Potenzreihenverfahren auf der einen und Randfunktionen auf der anderen Seite betreffen. So zeigen wir z.B., daß zu einer geeignet vorgelegten Randfunktion R stets zwei verschiedene Potenzreihenverfahren existieren, von denen bei Limitierung in der durch R bestimmten verallgemeinerten Stolz-Menge nur jeweils eines permanent ist. Ein ähnlich gelagerter Satz macht eine Aussage über die Veränderung der Limitierungseigenschaft eines Potenzreihenverfahrens bei Modifikation der zugrundeliegenden Stolz-Menge bzw. der bestimmenden Randfunktion.

Auf die wichtigsten Ergebnisse sei nun noch kurz zusammenfassend hingewiesen: 2.1.3 (Existenz holomorpher Randabstandsfunktionen), 2.2.6 (Cauchy-Ungleichungen in Stolz-Gebieten), 2.3.3 (Permanenz und Randfunktionen), 2.3.5 (Limitierung und Randfunktionen), 3.1.2 (Momentenfolgen-Vergleichssatz), 3.2.8 (Existenz einer "Differential"-Transformation zwischen Potenzreihenverfahren, die über eine polynom-erzeugte Folge verknüpft sind), 3.2.11 (Allgemeiner PE-Folgen-Vergleichssatz), 3.3.1 (Allgemeiner Äquivalenzsatz), 3.3.3 (Äquivalenz mit dem Abel-Verfahren), 3.4.9 (Spezieller PE-Folgen-Vergleichssatz mit notwendigen und hinreichenden Vergleichsbedingungen), ebenso 3.4.10, ferner die Taubersätze 3.5.2 und 3.5.3. Anwendungsbezogene Aussagen: 4.1.5 (Äquivalenzsatz für Abel-Verfahren), 4.1.6 (Taubersatz für Abel-Verfahren), 4.2.13 (Taubersatz für das logarithmische Verfahren L), 4.2.4 (Permanenzsatz für L), 4.3.4 und 4.3.6 (Beziehungen zwischen Abel-Verfahren und Gronwall-Verfahren).

1.2 Begriffsbestimmungen

Im folgenden geben wir Definitionen für die grundlegenden Begriffe zur Behandlung von Abelschen Potenzreihenverfahren mit komplexem Parameter.

1.2.1 DEFINITION *(Randfunktion)*

Eine im Nullpunkt stetige, nullpunktstreue reelle Funktion[1] *R nennen wir* ***Randfunktion****, wenn es ein positives δ gibt, so daß R im Intervall $[0,\delta]$ monoton nicht fallend ist.*

1.2.2 DEFINITION *(verallgemeinerte Stolz-Mengen)*

Sei R eine Randfunktion. Für jedes $\delta>0$ verstehen wir unter $S_\delta(R)$ die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0<1-\mathrm{Re}(z)\le\delta,\ |\mathrm{Im}(z)|\le|R(1-\mathrm{Re}(z))| \right\}$$

Die Sprechweise " $z\longrightarrow 1$, $z \in S(R)$ " soll bedeuten: $\exists\,\delta>0$, so daß z beim Grenzübergang $z\longrightarrow 1$ stets in $S_\delta(R)$ bleibt. Allgemein ist die Notation **S(R)** *als wohlverstandenes Synonym zu der Umschreibung "eine verallgemeinerte Stolz-Menge zu R" zu nehmen.*

1.2.3 DEFINTION *(Potenzreihenverfahren)*

Sei R ist eine Randfunktion, (p_n) irgendeine Folge und P eine auf $[0,1[$ nullstellenfreie Funktion. Ferner gebe es ein $\delta>0$ und ein Gebiet $D \supset [0,1[\cup S_\delta(R)$ in welchem P und die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ beide holomorph sind. Weiter gelte

$$\forall \tau \in [0,1[:\ \lim \frac{1}{P(z)} = 0 \qquad \text{für } z\longrightarrow 1,\ z \in S_\delta(\tau R)$$

und

$$\forall \tau \in [0,1[:\ \lim \frac{1}{P(z)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = 1 \qquad \text{für } z\longrightarrow 1,\ z \in S_\delta(\tau R)$$

Das Tripel $[P;p_n;R]$ nennen wir ein (Abelsches-) ***Potenzreihenverfahren****. Gilt sogar*

1 Darunter sei eine Funktion verstanden, die für reelle Argumente stets reelle Werte annimmt.

$$P(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad ,$$

so sprechen wir auch von einem **normierten** *Potenzreihenverfahren.*

Mit Hilfe dieser Vereinbarungen definieren wir nun einen auf die Problematik komplexwertiger Limitierung angepaßten Grenzwertbegriff.

1.2.4 DEFINITION ***(Limitierung)***

Sei $[P;p_n;R]$ *ein Potenzreihenverfahren und* (s_n) *irgendeine komplexe Folge. Wir setzen*

$$\Phi_{[P;p_n]}[s_n](z) := \frac{1}{P(z)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n z^n$$

Wenn $\Phi = \Phi_{[P;p_n]}$ *für ein* $\delta > 0$ *holomorph ist in einem Gebiet* $D \subset [0,1[\cup S_\delta(R)$, *und es ein* $s \in \mathbb{C}$ *gibt, so daß*

$$\forall \tau \in [0,1[: \quad \Phi[s_n](z) \longrightarrow s \quad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(\tau R),$$

dann sagen wir, die Folge (s_n) *sei* $[P;p_n;R]$*-limitierbar (und zwar zum Grenzwert s).*
Falls das letztere zutrifft, schreiben wir auch

$$[P;p_n;R] - \lim s_n = s \quad \textit{bzw.} \quad s_n \longrightarrow s \ ([P;p_n;R])$$

1.2.5 BEMERKUNG

Jedes Potenzreihenverfahren $[P;p_n;R]$ limitiert die Konstantenfolge $(c)_{n\geq 0}$ offensichtlich zum Grenzwert c. Daher folgt für ein Paar von Potenzreihenverfahren $[P;p_n;R]$ und $[Q;q_n;R]$ aus der Inklusionsbeziehung

$$(*) \qquad s_n \longrightarrow 0 \ [P;p_n;R] \quad \Longrightarrow \quad s_n \longrightarrow 0 \ [Q;q_n;R]$$

sofort die volle Einschließung $[P;p_n;R] \subset [Q;q_n;R]$ mit Verträglichkeit.

Denn gilt etwa $[P;p_n;R]$ - lim $s_n = s$, so ist $(s_n - s)$ wegen

$$\Phi_P[s_n - s] = \Phi_P[s_n] - \Phi_P[s]$$

eine $[P;p_n;R]$ - Nullfolge und somit, aufgrund von

$$\Phi_P[s_n] = \Phi_P[s_n - s] + \Phi_P[s]$$

und (*), auch $[Q;q_n;R]$ - lim $s_n = s$.

Wenn klar ist, welche Randfunktion wir meinen, dann verzichten wir auf die Angabe von R und bezeichnen schon $[P;p_n]$ als Potenzreihenverfahren. In vielen interessanten Fällen haben wir es überdies mit normierten Verfahren zu tun. Dann beschränken wir uns auf die Angabe nur eines bestimmenden Parameters und schreiben einfach $[P]$ bzw. $[p_n]$ für $[P;p_n]$.

Falls $\Phi_{[P;p_n]}[s_n](z)$ beim Grenzübergang $z \longrightarrow 1$, $z \in S(\tau R)$ beschränkt ist, so notieren wir sinngemäß auch $s_n = O(1)\,[P;p_n;R]$. Völlig analog ist die Schreibweise $s_n = o(1)\,[P;p_n;R]$ zu verstehen.

Diese Konventionen wollen wir hinfort beibehalten. Des weiteren unterdrücken wir bei den häufig auftretenden Limesbildungen der Form lim s_n meist den eigentlich erforderlichen Zusatz " für $n \longrightarrow \infty$". Unter "i" verstehen wir die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$. Manchmal verwenden wir den Buchstaben i auch als Summationsindex. Verwechslungen oder Mißverständnisse sind in all diesen Fällen ausgeschlossen. Im Zusammenhang mit Potenzreihen des in den Definitionen 1.2.3 und 1.2.4 notierten Typs verlangen wir, ohne dies im Einzelfall immer wieder zu betonen, in der Regel zumindest Konvergenz in einer Umgebung des Nullpunktes. Um Unklarheiten zu vermeiden, werden darüber hinausgehende oder abweichende Voraussetzungen immer gesondert formuliert.

In Definition 1.2.3 haben wir lediglich Funktionen P zugelassen, die auf dem reellen Intervall $[0,1[$ nullstellenfrei sind. Da die relevante Funktion P bei der Definition der Limitierung im Nenner auftritt, scheint dies zunächst eine natürliche Voraussetzung zu sein. Dennoch handelt es sich hierbei um eine durchaus verzichtbare Bedingung, die nur mit der Intention eingeführt wurde, einige der nachfolgenden Sätze knapper formulieren und beweisen zu können. Indes, man macht sich leicht klar, daß damit kein Verlust an Allgemeinheit verbunden ist.

Der einfache Grenzübergang $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$ stellt ersichtlich höhere Ansprüche an die zu limitierende Funktion, als die Familie von Grenzübergängen $z \longrightarrow 1$, $z \in S_\delta(\tau R)$, $\tau \in [0,1[$. Wir werden beide Methoden Limitierungsproblemen zugrundelegen. Unser Hauptaugenmerk richten wir allerdings auf das letztgenannte Verfahren, weil sich gerade damit viele Aussagen in einer prägnanten Form aussprechen lassen. Gelegentlich ist jedoch auch der erstgenannte Grenzübergang das adäquate Mittel zur Behandlung einer limitierungstheoretischen Fragestellung. Beide Ansätze sind von der konventionell verstandenen Limitierung im Reellen bzw. im Stolz'schen Winkelraum her motivierbar.

Der gefaßte Limitierungsbegriff läßt sich problemlos auf absolute und starke Limitierbarkeit erweitern. Wir gehen nur kurz auf eine mögliche Definition der ersteren ein. Hierzu knüpfen wir unmittelbar an 1.2.4 an:

> (s_n) heißt **absolut** $[P;p_n;R]$-limitierbar, wenn das Integral
>
> $$\int_{C_z} \left|\Phi_P^{\cdot}[s_n](\zeta)\right| |d\zeta|$$
>
> für alle $\tau \in [0,1[$ und alle Wege C_z von 0 nach z in D beim Grenzübergang $z \longrightarrow 1$, $z \in S(\tau R)$, beschränkt bleibt.

Zur Motivation dieses Ansatzes sei auf FEKETE [15], FLETT [17], MISHRA [27] oder auch BORWEIN - RIZVI [35] verwiesen. Fragestellungen zur absoluten Limitierung werden wir allerdings nicht vertiefen.

In den Definitionen 1.2.2 bis 1.2.4 können wir anstatt $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$ natürlich auch $1-z \longrightarrow 0$, $z \in S(R)$ schreiben; ebenso $Re(1-z)$ für $1-Re(z)$. Wenn wir nun überall in den so umgeschriebenen Definitionen die Terme $1-z$ durch $1/z$ und — ganz formal — das Intervall $[0,1-0]:=[0,1[$ durch $[0,1/0]:=[0,\infty[$ ersetzen, so erhalten wir ganz zwanglos eine sinnfällige Definition verallgemeinerter *Borelscher Potenzreihenverfahren*. Wie bereits oben erwähnt, werden wir auf diese Verfahren jedoch nicht näher eingehen. Soviel sei immerhin gesagt, vermöge der skizzierten Analogie lassen sich einige interessante Aussagen der nachfolgend entwickelten Theorie relativ einfach in Sätze über Borelsche Potenzreihenverfahren umsetzen.

2. Randfunktionen und Potenzreihenverfahren

2.1 Holomorphe Randabstandsfunktionen

In diesem Abschnitt führen wir den für das Weitere grundlegenden Begriff der *holomorphen Randabstandsfunktion* ein, und beweisen auch gleich zwei Existenzsätze. Wir beginnen mit der folgenden Definition:

2.1.1 DEFINITION ***(holomorphe Randabstandsfunktion)***

Sei R eine Randfunktion. Eine komplexe Funktion h nennen wir eine ***holomorphe Randabstandsfunktion*** *in S(R), wenn es ein $\delta>0$ gibt, so daß gilt*

(i) *h ist holomorph in $S_\delta(R)$.*

(ii) *für alle $\tau\in[0,1[$ existieren Konstanten* a_τ, b_τ, $\delta>r_\tau>0$ *mit*

$$a_\tau \cdot \rho_R(z) \le |h(z)| \le b_\tau \cdot \rho_R(z) \quad \text{für alle } z\in S_{r_\tau}(R).$$

Unter $\rho_R(z)$ verstehen wir hierbei den Randabstand eines Punktes z aus $S_\delta(R)$, also $\rho_R(z) := \inf\{\,|z-w| \mid w\in\partial S_\delta(R)\,\}$.

Die Menge aller holomorphen Randabstandsfunktionen bezüglich S(R) bezeichnen wir mit HR(R).

Aufgrund von Punkt (ii) dieser Vereinbarung ist mit h auch jedes Produkt $c*h$, $c\in\mathbb{C}$, eine holomorphe Randabstandsfunktion.

Unser Ziel ist nun zunächst der Nachweis, daß, zumindest unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen an die Randfunktion R, die Menge HR(R) im allgemeinen nicht leer ist. Da wir nur an holomorphen Randabstandsfunktionen interessiert sind, vereinbaren wir noch

2.1.2 DEFINITION ***(holomorphe Randfunktion)***

Eine komplexe Funktion R, für die gilt

(i) $R_{|\mathbb{R}}$ *ist eine Randfunktion*

(ii) *R(1-z) ist holomorph in einem Gebiet* $D \supset S_\delta(R)$, $\delta>0$,

nennen wir eine ***holomorphe Randfunktion*** *(in D).*

Eine erste, relativ allgemeine Existenzaussage macht der folgende Satz:

2.1.3 SATZ ***(Existenz holomorpher Randabstandsfunktionen)***

Wenn eine holomorphe Randfunktion den Bedingungen

(i) $\exists x_0>0$: $\frac{\partial R}{\partial x}$ *ist monoton nicht-fallend und beschränkt für alle* $x \in]0,x_0]$.

(ii) $\exists a>0$: $R(x) \le aR(x/2)$ *für* $0 \le x \le x_0$

(iii) $\exists c,d,\delta>0$: $c|R(\mathrm{Re}(1-z))| \le |R(1-z)| \le d|R(\mathrm{Re}(1-z))|$ *für alle* $z \in S_\delta(R)$

genügt, so ist $h(z) := R(1-z)$ *eine holomorphe Randabstandsfunktion in S(R).*

Beweis: Wir fixieren Konstanten $a,c,d > 0$ und wählen insbesondere $\delta > x_0 > 0$. Sei zunächst $R(x)>0$ für alle $x \in]0,x_0]$. Nach (i) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$\frac{\partial R}{\partial x} < (2^m-1)^{1/2} \quad \text{für alle } x \in]0,x_0].$$

Wegen $R(0)=0$ und der Stetigkeit von R in $[0,x_0]$ können wir ein $x_1 \in]0,x_0]$ wählen, das der Ungleichung

(1) $$R(x_1) < x_0 - x_1$$

genügt. Die Monotonie von R zieht dann

(2) $$R(x) < x_0 - x_1 \quad \text{für alle } x \in [0,x_1]$$

nach sich. Sei nun $\tau \in [0,1[$ und $z \in S_{x_1}(R)$ sowie $x_z - iy_z := 1-z$. Ferner bezeichne $\rho_R(z)$ (wie in Definition 2.1.1) den Randabstand von z in $S_\delta(R)$. Zunächst beschränken wir uns auf $y_z \geq 0$.

Der Randabstand von z in $S_{x_0}(R)$ ist

(3) $$\rho_R(z) = \min \left\{ |z-w| \;\middle|\; w \in \partial S_{x_0}(R) \right\}$$

Aufgrund von

(4) $$\partial S_{x_0}(R) = G(R) \cup G(-R) \cup M_0$$

mit $$G(R) := \left\{ x+iR(x) \;\middle|\; 0 \leq x \leq x_0 \right\}$$

und $$M_0 := \left\{ x_0+iy \;\middle|\; -R(x_0) \leq y \leq R(x_0) \right\}$$

folgt für alle $w \in M_0$

(5) $$|z-w| \geq |x_z - \mathrm{Re}(w)| = x_0 - x_z \geq x_0 - x_1 > R(x_z)$$

Daher nimmt die Randabstandsfunktion $\rho_R(z)$ ein Minimum für $w \in G(R)$ an. Aus Symmetriegründen ist $G(-R)$ in der Tat kein Kandidat, da wir $y_z \geq 0$ vorausgesetzt haben. Demnach gilt für $x_z \leq x_1$

(6) $$\rho_R(z) = \min \left\{ |z-w| \;\middle|\; w \in G(R) \right\}$$

Wir suchen also den Abstand von z bezüglich der durch den Graph von R gebildeten Kurve. Bekanntlich gibt es nun einen Punkt $w=z_N$ auf dieser Kurve mit $\rho_R(z) = |z-z_N|$. Insbesondere ist der "Vektor" $z-z_N$ bezüglich der Kurve normal in $z_N =: 1-x_N+iy_N$. Die Existenz und die Eindeutigkeit von z_N werden durch die Bedingung (i) sichergestellt.
Da also die Strecke $\overrightarrow{zz_N}$ mit der Tangente des Graphen von R einen rechten Winkel bildet, haben wir

(7) $$\frac{y_N - y_z}{x_N - x_z} = - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{x=x_N} \right)^{-1}$$

Für den Schnittpunkt z_S der Strecke $\overrightarrow{zz_N}$ mit dem Graphen von τR gilt natürlich eine entsprechende Beziehung mit y_S und x_S anstelle von y_Z

und x_Z. Wie man sich leicht überlegt, gelten die Ungleichungen

(8) $$x_N < x_S < x_Z \quad \text{und} \quad y_N > y_S > y_Z$$

Aufgrund von (i) ist weiter

$$\int_{x_N}^{x_S} \frac{\partial \tau R}{\partial x}\, dx \le \tau \left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{x=x_S} \cdot (x_S - x_N)$$

also

(9) $$y_S - \tau y_N \le \tau \left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{x=x_S} \cdot (x_S - x_N)$$

Mit Hilfe von (7) und (9) können wir nun folgern

$$\begin{aligned} y_S - \tau y_N &= y_N - y_S + y_S - \tau y_N \\ &\le y_N - y_S + \tau \left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{x=x_S} \cdot (x_S - x_N) \\ &= y_N - y_S + \tau \left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{x=x_S} \cdot \left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{x=x_N} \cdot (y_N - y_S) \\ &= \left(1 + \tau \left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{x=x_S} \cdot \left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{x=x_N}\right) (y_N - y_S) \\ &< \left(1 + \tau (2^m - 1)\right) (y_N - y_S) \\ &< 2^m \, (y_N - y_S) \end{aligned}$$

bzw.

(10) $$y_N - y_S > 2^{-m} (1-\tau)\, y_N$$

Also gilt

$$\rho_R(z) = |z_N - z| \ge y_N - y_Z$$

(11) $$> y_N - y_S$$

$$> 2^{-m}\,(1-\tau)\,y_N$$

Des weiteren haben wir

$$y_N = R(x_N) = \int_0^{x_N} \frac{\partial R}{\partial x}\,dx \le \left(2^m-1\right)^{1/2} x_N \tag{12}$$

und nach (7)

$$x_Z-x_N = \frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{x=x_N} \cdot (y_N-y_Z)$$

$$< \left(2^m-1\right)^{1/2} (y_N-y_Z) \tag{13}$$

$$< \left(2^m-1\right)^{1/2} y_N$$

d. h.,

$$x_Z-x_N < \left(2^m-1\right) x_N$$

bzw.

$$x_N > 2^{-m}\,x_Z \tag{14}$$

Die Monotonie von R hat nun mit (ii)

$$y_N = R(x_N) \ge R(2^{-m}x_Z) \tag{15}$$

$$\ge a^{-m}\,R(x_Z)$$

zur Folge. Die Gültigkeit der letzten Ungleichung leitet man aus (ii) leicht durch vollständige Induktion nach m her.

Wenn wir nun (iii) berücksichtigen und (11) und (15) zusammenfassen, sind wir fast fertig:

$$\rho_R(z) > 2^{-m}\,(1-\tau)\,y_N \tag{16}$$

$$\geq 2^{-m}\ (1-\tau)\ a^{-m}\ R(x_Z)$$

$$\geq 2^{-m}\ \frac{1-\tau}{d}\ a^{-m}\ \left|R(1-z)\right|$$

Bei Verzicht auf die Beschränkung $y_Z \geq 0$ werden wir auf die identische Beziehung geführt. Dies ergibt sich schon aufgrund einfacher Symmetrieüberlegungen. Wir haben daher bewiesen:

$$\forall \tau' \in [0,1[:\ \exists \delta' > 0:\ \forall z \in S_{\delta'}(\tau R):\ \left|R(1-z)\right| \leq \frac{2^m a^m d}{1-\tau'}\ \rho_R(z)$$

Hierbei ist $\rho_R(z)$ sinngemäß als Randabstand in $S_{\delta'}(R)$ zu verstehen. Andererseits zieht (7)

$$|z-z_N|^2 = (x_Z-x_N)^2 + (y_Z-y_N)^2$$

$$= \left(1+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{x=x_N}\right)^2\right)\ (y_Z-y_N)^2$$

$$< 2^m\ (y_Z-y_N)^2$$

$$< 2^m\ y_Z^2$$

nach sich. Dies bedeutet aber

$$\rho_R(z) \leq 2^{m/2}\ |y_Z|$$

$$\leq 2^{m/2}\ |R(\mathrm{Re}(1-z))|$$

$$\leq \frac{2^{m/2}}{c}\ |R(1-z)|$$

und somit auch (mit $\rho_R(z)$ bezüglich δ' definiert)

$$\forall \tau' \in [0,1[:\ \exists \delta' > 0:\ \forall z \in S_{\delta'}(\tau R):\ \left|R(1-z)\right| \geq c\ 2^{-m/2}\ \rho_R(z)$$

Daher haben wir nachgewiesen, daß $h(z) = R(1-z)$ tatsächlich eine holomorphe Randabstandsfunktion ist.

Lassen wir nun die eingangs gemachte Voraussetzung $R(x)>0$ fallen, dann gibt es ein $x_2 \in]0,x_0]$, so daß $R(x_2)=0$. Demnach ist $R(x)=0$ für alle $x\in[0,x_2]$, mithin entartet $S_\delta(R)$ für $\delta \le x_2$ zu einem Intervall $]0,\delta]$ der x-Achse. Trivialerweise ist der Randabstand in $S_\delta(R)$ nun identisch Null. Die Aussage des Satzes gilt daher auch in diesem Falle unverändert. &

Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes zeigen wir nun, daß die Mehrzahl der interessierenden Randfunktionen zugleich holomorphe Randabstandsfunktionen sind. Das ist bereits der angestrebte konkrete Existenzsatz.

2.1.4 SATZ

Seien $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\ge 1$, $\beta>0$ sowie λ eine reelle, im Nullpunkt holomorphe Funktion mit $\lambda(0)=0$, $\lambda'(0)\ge 0$ und $\lambda''(0)>0$.
Dann ist

$$R(z) := \beta\ z^\alpha\ (1+\lambda(z))$$

eine holomorphe Randfunktion und $h(z) := R(1-z)$ eine holomorphe Randabstandsfunktion in $S(R)$.

Beweis: Zunächst gibt es ein $\delta>0$, so daß λ in einer δ-Umgebung des Nullpunktes holomorph ist und für alle $x=\mathrm{Re}(z)\in]0,\delta]$ sowohl $\lambda'(x)$ als auch $\lambda''(x)$ positiv sind. Demnach sind auch

$$(1) \qquad R'(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1}\ (1+\lambda(x)) + \beta x^\alpha \lambda'(x)$$

und

$$(2) \qquad R''(x) = \alpha(\alpha-1)\beta x^{\alpha-2}\ (1+\lambda(x)) + 2\alpha\beta x^{\alpha-1}\ \lambda'(x) + \beta x^\alpha\ \lambda''(x)$$

für alle $x\in]0,\delta]$ positiv. D.h., $R(x)$ ist monoton nicht-fallend wegen (1) sowie $R'(x)$ ist monoton nicht-fallend wegen (2) und beschränkt aufgrund von (1). Damit haben wir bereits gezeigt, daß $R(1-z)$ eine holomorphe Randfunktion ist, die Satz 2.1.3(i) genügt. Um die Behauptung zu beweisen, müssen wir nur noch die Bedingungen (ii) und (iii) des genannten Satzes verifizieren.

zu (ii): Das oben eingeführte δ können wir natürlich so wählen, daß $1/2\ge\lambda(x)\ge 0$ für alle $x\in[0,\delta]$. Demnach ergibt sich

$$\begin{aligned} R(x/2) &= 2^{-\alpha}\beta x^{\alpha}\ (1+\lambda(x/2)) \\ &\geq 2^{-\alpha}\beta x^{\alpha}\ 2^{-1}\ (1+1/2) \\ &\geq 2^{-\alpha-1}\beta x^{\alpha}\ (1+\lambda(x)) \\ &\geq 2^{-\alpha-1}\ R(x) \qquad\qquad \text{für alle } x\epsilon[0,\delta] \end{aligned}$$

zu (iii): Bei geeigneter Wahl von δ gilt $|\lambda(z)|\leq 1/2$ für alle $z\epsilon\Delta_{\delta}(0)$. Aufgrund dessen schließen wir

$$1/2 \leq 1-|\lambda(z)| \leq |1+\lambda(z)| \leq 1+|\lambda(z)| \leq 3/2$$

und folglich, mit $x+iy := z$

$$\frac{1}{3} = \frac{1/2}{3/2} \leq \frac{|1+\lambda(1-z)|}{|1+\lambda(1-x)|} \leq \frac{3/2}{1/2} = 3$$

für alle $z\epsilon\Delta_{\delta}(1)$.
Des weiteren gilt

$$0 \leq \frac{R(1-x)}{(1-x)} = \beta(1-x)^{\alpha-1}\left(1+\lambda(1-x)\right) \leq \frac{3}{2}\beta\delta^{\alpha-1}$$

Daher ergibt sich für alle $z\epsilon S_{\delta}(R)$

$$0 \leq \frac{|y|}{1-x} \leq \frac{3}{2}|\beta|\delta^{\alpha-1}$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned} \frac{|R(1-z)|}{|R(1-x)|} &= \left|1+i\frac{y}{1-x}\right|^{\alpha}\frac{|1+\lambda(1-z)|}{|1+\lambda(1-x)|} \\ &\leq \left(1+\frac{|y|}{1-x}\right)^{\alpha}\cdot 3 \end{aligned}$$

werden wir somit auf die gewünschte Abschätzung

$$\frac{1}{3} \leq \frac{|R(1-z)|}{|R(1-x)|} \leq \left(1+\frac{3}{2}|\beta|\delta^{\alpha-1}\right)^{\alpha}\cdot 3$$

geführt, die nach der gegebenen Ableitung für alle $z\epsilon S_{\delta}(R)$ zutrifft. &

Die Aussage dieses Satzes wird sich noch als sehr nützlich erweisen. In praktisch allen relevanten Fällen können wir uns nämlich die Bestimmung einer Randabstandsfunktion unter Berufung auf Satz 2.1.4 ersparen. Um diesen Sachverhalt hervorzuheben, definieren wir daher:

2.1.5 DEFINITION *(Standard-Randfunktionen)*

Eine Funktion $R(z) := \beta z^{\alpha}$ mit $\alpha,\beta>0$, bezeichnen wir als ***Standard-Randfunktion*** *oder kurz als* ***SRF***. *Gelegentlich schreiben wir auch genauer $R \in SRF(\alpha,\beta)$.*

Nach Satz 2.1.4 sind SRFen mit $\alpha \geq 1$ tatsächlich zugleich (holomorphe) Randfunktionen und — nach Argumentensubstitution $1-z$ — holomorphe Randabstandsfunktionen. Wie man leicht zeigt, gilt dies für $\alpha<1$ jedoch nicht mehr.

Eine sehr spezielle Klasse von Randfunktionen wurde bereits früher benutzt. Es handelt sich hierbei um die sogenannten "Stolz'schen Dreiecke", bzw. "-Winkel" (s. KNOPP [25] Satz 233, S. 219 ff). Tatsächlich entspricht $S(R)$, mit $R(z) = z \cdot \tan \Theta$, $0<\Theta<{}^{\pi}/_{2}$ gerade einem Stolz'schen Dreieck mit dem Öffnungswinkel 2Θ (in 1). In der hier verfolgten Richtung wurden indes keine Untersuchungen angestellt. Dennoch wollen wir vereinbaren:

2.1.6 DEFINITION *(Stolz'sche Randfunktionen)*

Eine Randfunktion $R(z) = \beta z$, $0<\beta<\infty$, bezeichnen wir als ***Stolz'sche Randfunktion***.

Bezüglich Stolz'scher Randfunktionen werden wir später eine weitreichende Aussage über die Äquivalenz gewisser Potenzreihenverfahren mit dem Abel-Verfahren verifizieren.

Beim Beweis von Satz 2.1.3 hatten wir Randfunktionen die für ein $x>0$ verschwinden als Sonderfall behandelt. Der Grund hierfür liegt in der Entartung von $S_{\delta}(R)$ für genügend kleine $\delta>0$. Solche Randfunktionen sind dem gewählten Zugang zu einer Theorie verallgemeinerter Potenzreihenverfahren offensichtlich fremd. In der Tat lassen sich die weitaus meisten — und interessantesten — der in dieser Arbeit bewiesenen Aussagen über Potenzreihenverfahren nicht auf den angesprochenen, sozusagen "pathologischen" Fall übertragen. Indes, auch verschwindende Randfunktionen verdienen Beachtung, denn sie schaffen die Verbindung zwischen den gewöhnlichen Potenzreihenverfahren und deren hier betrachteten kompexwertigen Verallgemeinerung.

Wir vereinbaren daher die folgende Redeweise:

2.1.7 DEFINITION

Eine Randfunktion R, die für ein $x>0$ verschwindet, nennen wir ***entartet***.

Entprechend dieser Definition haben wir es im folgenden meist mit "nicht-entarteten" Randfunktionen zu tun. Insbesondere sind SRFen und Stolz'sche Randfunktionen nicht entartet.

Zum Vergleich der Wirkfelder von Potenzreihenverfahren mit unterschiedlichen Randfunktionen ist die folgende Begriffsbildung nützlich.

2.1.8 DEFINITION

Für zwei Randfunktionen R_1 und R_2 schreiben wir $R_1 \lesssim R_2$, wenn

(*) $\quad \forall\varepsilon>0\colon \exists\delta>0\colon \forall x\in]0,\delta[\colon \; R_1(x) \le (1+\varepsilon)R_2(x)$

Falls $R_1 \lesssim R_2$ und $R_2 \lesssim R_1$, so notieren wir $R_1 \approx R_2$.

2.1.9 BEMERKUNG

Wenn wir zu einem beliebigen $t_1\in]0,1[$ zuerst ein $\varepsilon<1/t_1$ wählen und dann $t_2:=(1+\varepsilon)t_1$ setzen, so gilt in 2.1.8(*) $t_1R_1(x) \le t_2R_2(x)$ mit $0<t_2<1$. Wie man leicht einsieht, ist daher 2.1.8(*) eine hinreichende Bedingung für

(+) $\quad \forall t_1\in[0,1[\colon \exists t_2\in[0,1[\colon \exists\delta>0\colon \forall x\in]0,\delta[\colon \; t_1R_1(x) \le t_2R_2(x)$

Umgekehrt folgt aus (+), ausgehend von einem willkürlich festgelegten $\varepsilon>0$ und einem $t_1\in]0,1[$ mit $1/t_1>1+\varepsilon$ sowie $t_2:=(1+\varepsilon)t_1<1$, sofort

$$R_1(x) \le (1+\varepsilon)R_2(x)$$

Daher sind die Bedingungen (+) und 2.1.8 (*) äquivalent.

Definition 2.1.8 ist von Nutzen zur kürzeren Darstellung mancher Beweise. Ist nämlich eine gutartige Eigenschaft E — etwa Konvergenz oder Beschränktheit — bezüglich des Grenzübergangs $z \longrightarrow 1$, $z \in S(tR)$, $0 \le t < 1$ erfüllt, so trifft E natürlich auch für den Grenzübergang $z \longrightarrow 1, z \in S(t'R')$, $0 \le t' < 1$ zu, wenn nur $R' \lesssim R$. Dies ist klar, denn die charakterisierende Bemerkung 2.1.9(+) sagt ja gerade aus, daß zu jedem $t'<1$ ein $t<1$ und ein $\delta>0$ existieren mit $S_\delta(t'R') \subset S_\delta(tR)$. Wir haben folglich

2.1.10 LEMMA

Wenn $R' \lesssim R$, und eine Konvergenz- oder Beschränktheitseigenschaft E trifft bezüglich des Grenzübergangs $z \longrightarrow 1$, $z \in S(tR)$, $0 \le t < 1$ zu, so gilt E auch bei $z \longrightarrow 1$, $z \in S(t'R')$, $0 \le t' < 1$.

2.1.11 BEMERKUNG

Analog zur Begriffsbildung " $\lesssim$ " kann man eine Relation "$\le$" definieren. Hierzu genügt es, in 2.1.8(*) einfach $\varepsilon=0$ zu setzen. Wie man sich leicht überlegt, leistet diese Definition bezüglich des Grenzübergangs $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$ dasselbe, wie " $\lesssim$ " bezüglich $z \longrightarrow 1$, $z \in S(tR)$, $0 \le t < 1$. D.h., Lemma 2.1.10 gilt analog.

2.2 Das Verhalten der Ableitungen einer holomorphen Funktion in S(R)

Wenn man holomorphe Funktionen in beliebigen Gebieten betrachtet, so werden durch die Cauchy'schen Ungleichungen — ohne nähere Kenntnis der fraglichen Funktion — die bestmöglichen Abschätzungen über das Verhalten der Ableitungen bei Annäherung an den Gebietsrand gegeben. Speziell für Stolz-Mengen bzw. -Gebiete ergeben sich hieraus unmittelbare Konsequenzen bezüglich des Randpunktes $z=+1$. Ein entsprechendes Resultat formulieren wir in Satz 2.2.6, dem wichtigsten dieses Abschnitts. Zuvor bemerken wir noch einiges zur Schreibweise.

2.2.1 DEFINITION

Sei R eine Randfunktion. Gilt für eine komplexe Funktion f

(i) $\forall \tau \in [0,1[: \exists \delta > 0, \ c > 0 : \ \forall z \in S_\delta(\tau R) : \ |f(z)| < c$

so schreiben wir $f \in O_R(1)$.
Entsprechend notieren wir $f \in o_R(1)$, wenn

(ii) $\forall \tau \in [0,1[: \forall \varepsilon > 0 : \ \exists \delta > 0 : \ \forall z \in S_\delta(\tau R) : \ |f(z)| < \varepsilon$

2.2.2 BEMERKUNG

Formuliert mit Hilfe gebräuchlicher Landau'scher Symbole haben wir

$$f \in O_R(1) \iff \forall \tau \in [0,1[: f(z) = O(1) \text{ für } z \longrightarrow 1 \ , \ z \in S(\tau R)$$

bzw.

$$f \in o_R(1) \iff \forall \tau \in [0,1[: f(z) = o(1) \text{ für } z \longrightarrow 1 \ , \ z \in S(\tau R)$$

Wie man leicht nachprüft, genügen die Elemente von O_R bzw. o_R den gleichen Rechenregeln wie die entsprechenden Landau'schen Symbole. Deren Schreibweise legt es daher nahe, anstelle von $f \in O_R(1)$ bzw. $f \in o_R(1)$ einfach $f = O_R(1)$ bzw. $f = o_R(1)$ zu notieren. Analog schreiben wir auch $f = O_R(g)$, falls $f/g = O_R(1)$ und $f = o_R(g)$, falls $f/g = o_R(1)$.

Im Sinne dieser Begriffsbildungen ist eine Folge (s_n) genau dann $[P;p_n;R]$-limitierbar (zum Grenzwert s), wenn $\Phi_P[s_n - s](z) = o_R(1)$ bzw. $\Phi_P[s_n](z) = s + o_R(1)$. Weiterhin gilt $s_n = O(1)[P;p_n;R]$ dann und nur dann, wenn $\Phi_P[s_n](z) = O_R(1)$.

Für den Punkt (i) der Definition 2.1.1 (Randabstandsfunktionen) bekommen wir ebenfalls eine kompaktere Form. Offensichtlich ist 2.1.1(ii) äquivalent mit $h = O_R(\rho_R)$ und $\rho_R = O_R(h)$.

Wir benutzen diese Schreibweise sogleich zur Formulierung von zwei weiteren Definitionen.

2.2.3 DEFINITION

Sei R eine Randfunktion. Eine holomorphe Randabstandsfunktion h bezüglich $S(R)$ nennen wir **glatt**, *wenn $h' = O_R(1)$.*

2.2.4 DEFINITION

Sei R eine Randfunktion. Eine holomorphe Randabstandsfunktion h bezüglich S(R) die der Bedingung

(*) $\forall \tau \in]0,1]$: $h=O_{\tau R}(\rho_{\tau R})$ und $\rho_{\tau R}=O_{\tau R}(h)$ für $z \longrightarrow 1$, $z \in S(\tau R)$

genügt, versehen wir mit dem Attribut ***total****.*

Den Inhalt dieser Vereinbarung können wir etwa so charakterisieren: Eine Randabstandsfunktion h bezüglich S(R) ist total genau dann, wenn h für jedes $\tau \in]0,1]$ Randabstandsfunktion bezüglich $S(\tau R)$ ist.

2.2.5 SATZ

Sei $R \in SRF(\alpha,\beta)$ mit $\alpha \geq 1$ und $h(z):=R(1-z)$. Dann ist h(z) eine glatte, totale und holomorphe Randabstandsfunktion in S(R).

Beweis: Die Glattheitsaussage ist klar. Zum Beweis des Restes für $\alpha \geq 1$ greifen wir auf Satz 2.1.3 zurück. Die Bedingungen dieses Satzes sind erfüllt. Mehr noch, sie gelten offensichtlich auch für jede Randfunktion τR, $\tau \in]0,1]$. Daher ist $\tau R(1-z)$ und folglich auch $R(1-z)$ eine holomorphe Randabstandsfunktion in $S(\tau R)$. Mit dem Hinweis auf die charakterisierenden Bemerkungen zu Definition 2.2.4 können wir schließen. &

Wir kommen nun zu einem der Kernsätze für die Behandlung von komplexwertigen Potenzreihenverfahren. Im wesentlichen stellt dieser Satz eine adäquate Formulierung der Cauchy'schen Ungleichungen für Ableitungen dar. Damit ist auch bereits das wichtigste Werkzeug zum Beweis genannt.

2.2.6 SATZ

Sei R eine nicht-entartete Randfunktion, h eine totale Randabstandsfunktion in S(R) und f eine für geeignetes r>0 in $S_r(R)$ holomorphe Funktion. Dann gelten

(i) $f=O_R(1) \implies \forall k \in \mathbb{N}: f^{(k)}=O_R(h^{-k})$

(ii) $\quad f=o_R(1) \quad \Longrightarrow \quad \forall k\in\mathbb{N}:\ f^{(k)}=o_R(h^{-k})$

Beweis: Sei $f=O_R(1)$. Dann gibt es für alle τ, $0<\tau<1$, eine Konstante $a>0$ und ein $\delta>0$, so daß $|f(z)|$ für alle $z\in S_\delta(\tau R)$ kleiner als a bleibt.
Da h total ist, existiert für jedes t, $0\le t<\tau$ eine Konstante b und ein $\delta'<\delta$ mit $|h(z)|\le b\rho_{\tau R}(z)$ für alle $z\in S_{\delta'}(tR)$. Nach Anwendung der Cauchy'schen Ungleichungen für Ableitungen ergibt sich daher

(1) $$\left|f^{(k)}(z)\right| \le k!\,a\,\rho_{\tau R}^{-k}(z) \le k!\,ab^k\,|h(z)|^{-k}$$

für alle $z\in S_{\delta'}(tR)$, $k\in\mathbb{N}$.
Da wir nun τ beliebig nahe an 1 und t beliebig nahe an τ wählen können, haben wir

(2) $$f^{(k)} = O_R(h^{-k})$$

Damit ist (i) gezeigt; (ii) beweist man völlig analog. &

Wir gehen sogleich eine erste Anwendung dieses Satzes an:

2.2.7 LEMMA

Sei R eine nicht-entartete Randfunktion und h eine glatte und totale Randabstandsfunktion aus HR(R). Ferner seien f und g zwei für ein $\delta>0$ in $S_\delta(R)$ holomorphe Funktionen. Wenn dann

$$\frac{f'}{f} = O_R(g)$$

so bestehen die Inklusionen

(i) $\quad \frac{1}{g}=O_R(h) \quad \Longrightarrow \quad \forall k\in\mathbb{N}:\ \frac{f^{(k)}}{f}=O_R(g^k)$

(ii) $\quad g=O_R(h^{-1}) \quad \Longrightarrow \quad \forall k\in\mathbb{N}:\ \frac{f^{(k)}}{f}=O_R(h^{-k})$

Beweis: Nach Voraussetzung haben wir $h'=O_R(1)$. Weiter ist

(1) $$\left(\frac{1}{g}\right)' = h\cdot\left(\frac{1}{gh}\right)' + \frac{1}{gh}\cdot h'$$

also, aufgrund von Satz 2.2.6

(2) $$\left(\frac{1}{g}\right)' = h\cdot O_R(1)\cdot\frac{1}{h} + O_R(1)\cdot O_R(1) = O_R(1)$$

Wir beweisen nun (i) durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist klar. Sei also für ein $k \geq 1$

(3) $$\frac{f^{(k)}}{f} = O_R(g)$$

Dann ist

(4) $$\left(\frac{f^{(k)}}{f g^k}\right)' = \frac{f^{(k+1)}}{f g^k} - \frac{f^{(k)}}{f g^k}\cdot\frac{f'}{f} - k\frac{g'}{g}\cdot\frac{f^{(k)}}{f g^k}$$

also

$$\frac{f^{(k+1)}}{f g^{k+1}} = \frac{1}{g}\left(\frac{f^{(k)}}{f g^k}\right)' + \frac{f^{(k)}}{f g^k}\cdot\frac{f'}{f g} - k\left(\frac{1}{g}\right)'\cdot\frac{f^{(k)}}{f g^k}$$

(5) $$= \frac{1}{g}\; O_R(1)\;\frac{1}{h} + O_R(1)\; O_R(1) + O_R(1)\; O_R(1)$$

$$= O_R(1)$$

Mithin ergibt sich $\frac{f^{(k+1)}}{f} = O_R(g^{k+1})$, was zu zeigen war.

Der Beweis von (ii) läuft völlig analog. Wir bekommen

$$\frac{f^{(k+1)}}{f}\, h^{k+1} = h\left(\frac{f^{(k)}}{f}\, h^k\right)' + \frac{f^{(k)}}{f}\, h^k\cdot\frac{f'}{fg}\, gh + k\frac{f^{(k)}}{f}\, h^k h'$$

(6) $$= h\cdot O_R(1)\;\frac{1}{h} + O_R(1)\; O_R(1) + O_R(1)\; O_R(1)$$

$$= O_R(1)$$

also auch hier den gewünschten Schluß. &

In Satz 2.2.6 hatten wir aus dem Verhalten von f in S(R) auf das Verhalten von f' geschlossen. Dem stellen wir nun ein Analogon für die umgekehrte Schlußrichtung zur Seite.

2.2.8 LEMMA

Sei R eine Randfunktion mit $R(x)=O(x)$ für $x\longrightarrow 0+$, und f eine für genügend kleines $\delta>0$ in $S_\delta(R)$ holomorphe Funktion. Mit einem $m\in\mathbb{N}$ und einem $\alpha\in\mathbb{R}$ gelte

(1) $\quad (1-z)^\alpha f^{(m)}(z) = o_R(1)$

Dann bestehen für alle $k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le m$, die folgenden Aussagen

(i) $\quad k<\alpha: \quad (1-z)^{\alpha-k} f^{(m-k)}(z) = o_R(1)$

(ii) $\quad k=\alpha: \quad f^{(m-k)}(z) = o_R(\log|1-z|)$

(iii) $\quad k>\alpha: \quad f^{(m-k)}(z) = O_R(1)$

Beweis: Es genügt, die folgenden 5 Aussagen für $\beta\in\mathbb{R}$, $g=f^{(m-k)}$, $1\le k\le m$, zu verifizieren.

(a) $\quad \beta>1: \quad (1-z)^\beta g'(z)=o_R(1) \quad\Longrightarrow\quad (1-z)^{\beta-1}g(z)=o_R(1)$

(b) $\quad \beta=1: \quad (1-z)\, g'(z)=o_R(1) \quad\Longrightarrow\quad g(z)=o_R(\log|1-z|)$

(c) $\quad 0<\beta<1: \quad (1-z)^\beta g'(z)=o_R(1) \quad\Longrightarrow\quad g(z)=O_R(1)$

(d) $\quad g'(z)=o_R(\log|1-z|) \quad\Longrightarrow\quad g(z)=O_R(1)$

(e) $\quad g'(z)=O_R(1) \quad\Longrightarrow\quad g(z)=O_R(1)$

Nach sukzessiver Anwendung von (a) für $1\le k\le m$ und $\beta=\alpha-k+1$ erhalten wir unmittelbar (i). Weiter folgt (ii) aus (i) in Verbindung mit (b). Schließlich ergibt sich (iii) für $0<k-\alpha<1$ aus (i) und (c), für $k-\alpha=1$ aus

(ii) und (d) und endlich für $k-\alpha>1$ aus (iii) (mit $k-\alpha\le1$) und (e).

Offensichtlich lassen sich (d) und (e) direkt aus (c) herleiten. Es ist nämlich

$$(2)\qquad \begin{aligned}(1-z)^{1/2}g'(z)&=(1-z)^{1/2}\log|1-z|\cdot\frac{g'(z)}{\log|1-z|}\\ &=o_R(1)\cdot\frac{g'(z)}{\log|1-z|}\end{aligned}$$

bzw.

$$(3)\qquad (1-z)^{1/2}g'(z)=o_R(1)\;g'(z)$$

Daher müssen wir nur noch (a), (b) und (c) beweisen. Zu diesem Zweck wählen wir als erstes ein $\tau\epsilon[0,1[$ und verifizieren die Aussagen für den Grenzübergang $z\longrightarrow1$, $z\epsilon S(\tau R)$.
Allgemein haben wir im Holomorphiegebiet von g

$$(4)\qquad g(z)-g(z_0)=\int_C g(\zeta)\;d\zeta$$

für jeden Weg C von z_0 nach z. Voraussetzungsgemäß gibt es nun zu jedem noch so kleinen $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, so daß g in $S_\delta(\tau R)$ holomorph ist und

$$(5)\qquad |g'(\zeta)|<\varepsilon|h(\zeta)|\qquad \text{für alle } \zeta\epsilon S_\delta(\tau R)$$

Hierbei ist — im Sinne einer simultanen Behandlung von (a), (b) und (c) — die eingeführte Funktion h jeweils als Platzhalter für den Reziprokterm des entsprechenden Faktors (z.B. $(1-z)^\beta$ bei (a)) zu nehmen.
Wir können jetzt schließen

$$(6)\qquad \begin{aligned}|g(z)|&\le|g(z_0)|+|g(z)-g(z_0)|\\ &\le|g(z_0)|+\int_C|g'(\zeta)|\;|d\zeta|\\ &\le|g(z_0)|+\varepsilon\int_C|h(\zeta)|\;|d\zeta|\end{aligned}$$

für jeden Weg C von z_0 nach z in $S_\delta(\tau R)$. Speziell wählen wir z_0 reell mit $z_0=x_0=1-\delta$ und die folgende Parametrisierung von C.

$$C = C_1 + C_2 \quad \text{mit}$$

$$C_1: \qquad \zeta = \zeta_1 = x_0 + (x - x_0)t \ , \ 0 \le t \le 1$$

$$C_2: \qquad \zeta = \zeta_2 = x + iyt \qquad , \ 0 \le t \le 1$$

Stillschweigend wurde hier $x+iy := z$ impliziert.

Wir fahren nun fort.

$$(7) \qquad |g(z)| \le |g(z_0)| + \varepsilon |x - x_0| \cdot \int_0^1 |h(\zeta_1(t))| \, dt + \varepsilon |y| \cdot \int_0^1 |h(\zeta_2(t))| \, dt$$

Mit $h(z) = (1-z)^{-\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, folgt

$$|x - x_0| \int_0^1 |h(\zeta_1(t))| \, dt = \int_0^1 \frac{|x - x_0| \quad dt}{(1 - x_0 - (x - x_0)t)^\beta}$$

$$(8) \qquad = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\left[(1-x_0)^{1-\beta} - (1-x)^{1-\beta}\right], & 0<\beta<1 \\ \log(1-x_0) - \log(1-x), & \beta = 1 \\ \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1}{(1-x)^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-x_0)^{\beta-1}}\right], & \beta > 1 \end{cases}$$

sowie

$$|y| \int_0^1 |h(\zeta_2(t))| \, dt = \int_0^1 \frac{|y| \quad dt}{|1 - x - iyt|^\beta}$$

$$(9) \qquad \le \int_0^1 \frac{|y| \ dt}{|1-x|^\beta}$$

$$= \frac{|y|}{|1-x|^\beta}$$

Da wir $R(x)=O(x)$ für $x \longrightarrow 0+$ vorausgesetzt haben, gibt es eine Konstante $c_1>0$, so daß

(10) $$|y| \le \tau |R(1-x)| \le \tau c_1 |1-x| \qquad \text{für alle } z \in S_\delta(\tau R)$$

Diese Konstante ist hierbei in dem Sinne unabhängig von δ wählbar, als daß aus der Gültigkeit von (10) für $z \in S_\delta(\tau R)$ natürlich auch (10) für $z \in S_{\delta'}(\tau R)$, $\delta'<\delta$ schließen können. Demnach erhalten wir für $0<\beta<1$ gemäß (8)

(11) $$\begin{aligned} |g(z)| &\le |g(x_0)| + \varepsilon \left[\frac{(1-x_0)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(1-x)^{1-\beta}}{1-\beta} \right] + \varepsilon \tau c_1 |1-x|^{1-\beta} \\ &\le |g(x_0)| + \varepsilon \frac{\delta^{1-\beta}}{1-\beta} + \varepsilon \tau c_1 \delta^{1-\beta} \end{aligned}$$

für alle $z=x+iy \in S_\delta(\tau R)$, d.h., es gibt eine Konstante $c_2>0$ mit

(12) $$|g(z)| \le c_2 \qquad \text{für alle } z \in S_\delta(\tau R)$$

Im Fall $\beta=1$ werden wir nach (8) auf

(13) $$|g(z)| \le |g(x_0)| + \varepsilon \left[\log(1-x_0) - \log(1-x) + \tau c_1 \right]$$

geführt. Wegen

(14) $$|1-z| \le |1-x| + |y| \le (1+c_1)(1-x) =: c_3(1-x)$$

und damit

$$\begin{aligned} \big| \log|1-z| \big| &\ge \log(1+c_1) + \big|\log(1-x)\big| \\ &\ge \big|\log(1-x)\big| \\ &\ge |\log \delta'| \qquad \text{für } z \in S_{\delta'}(\tau R),\ \delta'<\delta \end{aligned}$$

folgt weiter

(16)
$$\frac{|g(z)|}{|\log|1-z||} \le \frac{|g(x_0)|}{|\log|1-z||} + \varepsilon \frac{|\log|1-x_0|}{|\log|1-z||} + \varepsilon \frac{|\log|1-x||}{|\log|1-z||} + \frac{\varepsilon \tau c_1}{|\log|1-z||}$$
$$\le \frac{|g(x_0)|}{|\log \delta'|} + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \cdot \frac{\tau c_1}{|\log \delta'|}$$

Speziell sei

(17) $$\delta' < \min \left\{ \exp\left(-|g(x_0)|/_\varepsilon\right), \exp\left(-\tau c_1\right) \right\}$$

Dann erhalten wir aufgrund von

(18) $$|\log \delta'| > \max \left\{ |g(x_0)|/_\varepsilon, \tau c_1 \right\}$$

sofort

(19) $$\frac{|g(z)|}{|\log|1-z||} < 4\varepsilon \quad \text{für alle } z \epsilon S_{\delta'}(\tau R)$$

Schließlich ergibt sich für $\beta>1$

(20) $$|g(z)| \le |g(x_0)| + \frac{\varepsilon}{\beta-1}\left[\frac{1}{(1-x)^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-x_0)^{\beta-1}}\right] + \frac{\varepsilon \tau c_1}{(1-x)^{\beta-1}}$$

und weiter, mit (14) sowie $z \epsilon S_{\delta''}(\tau R)$, $\delta''<\delta$,

(21) $$|1-z|^{\beta-1}|g(z)| \le |g(x_0)|\left(c_3 \delta''\right)^{\beta-1} + \frac{2\varepsilon}{\beta-1} c_3^{\beta-1} + \varepsilon \tau c_1 c_3^{\beta-1}$$

Daher bekommen wir, unter der Voraussetzung

(22) $$\delta'' < \varepsilon \left|g(x_0)\right|^{-\frac{1}{\beta-1}}$$

unmittelbar

(23) $$|1-z|^{\beta-1}|g(z)| < c_3^{\beta-1}\left(1 + \frac{2}{\beta-1} + \tau c_1\right) \cdot \varepsilon$$

für alle $z \in S_{\delta''}(\tau R)$.

Damit haben wir in allen drei Fällen den gewünschten Schluß. $0<\beta<1$ entspricht (c), $\beta=1$ entspricht (b) und $\beta>1$ bezieht sich auf (a). Unbeschadet der Tatsache, daß sich die Schranken der Abschätzungen (12), (19) und (23) jeweils verändern werden, können wir τ beliebig nahe an 1 wählen. Daher haben wir alles gezeigt. &

Bei ausschließlicher Betrachtung verschwindender Randfunktionen (also Limitierung im Reellen) ist die Teilbehauptung (i) des vorstehenden Hilfssatzes ein Standardresultat, das z.B. schon bei KNOPP [25] (s. §62, S. 517 f) besprochen wird. Der Beweis ist in jenem Fall allerdings weniger aufwendig.

Mit Hilfe dieses Lemmas werden wir später Taubersätze für Potenzreihenverfahren beweisen (s. Abschnitte 3.5, 4.1 und 4.2).

2.3 Klassifizierung von Potenzreihenverfahren durch Randfunktionen

Die Relevanz der in diesem Kapitel gefaßten Begriffsbildungen für die Theorie der Potenzreihenverfahren haben wir noch nicht belegt. Wir wollen dies nun nachholen und beweisen zu diesem Zwecke einen Satz, der zwischen einer Klasse von Potenzreihenverfahren und einer Klasse von Randfunktionen einen direkten Bezug schafft. Der Beweis des noch zu formulierenden Satzes stützt sich im wesentlichen auf das folgende Lemma.

2.3.1 LEMMA

Sei R eine Randfunktion und $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta>0$. Es gilt

(*) $$\exp\left[(1-|z|)^{-\delta}-(1-z)^{-\delta}\right] = O_R(1)$$

genau dann, wenn $R(x)=O(x^{1+\delta/2})$ für $x \longrightarrow 0+$.

Beweis: Wir zeigen zuerst

(a) $\quad R(x)=R_\beta(x)=\beta x^{1+\delta/2},\ 0\leq\beta<\infty \quad \Longrightarrow \quad (*)$

Zu diesem Zwecke sei $y=R(x)$ und $1-z:=x+ity$ mit einem $t\in[-1,1]$. Ferner setzen wir

(1) $\quad F(z) := (1-|z|)^{-\delta}-(1-z)^{-\delta}$

Für $x\longrightarrow 0+$, also $z\longrightarrow 1$ folgt

$$\begin{aligned} 1-|z| &= 1-(1-x)\cdot\left(1+t^2y^2(1-x)^{-2}\right)^{1/2} \\ &= 1-(1-x)\cdot\left(1+\beta^2t^2x^{2+\delta}(1+o(1))\right)^{1/2} \\ &= 1-(1-x)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\beta^2t^2x^{2+\delta}(1+o(1))\right) \\ &= x\left(1+\frac{1}{2}\beta^2t^2x^{1+\delta}+o(x^{1+\delta})\right) \end{aligned}$$

also

$$(1-|z|)^{-\delta}= x^{-\delta}\left(1+o(x^{\delta})\right)$$

Weiter

$$\begin{aligned} (1-z)^{-\delta} &= \left(x+i\beta t x^{1+\delta/2}\right)^{-\delta} \\ &= x^{-\delta}\left(1+i\beta t x^{\delta/2}\right)^{-\delta} \\ &= x^{-\delta}\left(1-i\delta\beta t x^{\delta/2}-\frac{\delta(\delta+1)}{2}\beta^2t^2x^{\delta}+o(x^{\delta})\right) \end{aligned}$$

Daher bekommen wir

(3) $\quad F(z) = \dfrac{\delta(\delta+1)}{2}\beta^2t^2+i\delta\beta t x^{-\delta/2}+o(1) \qquad$ **für** $x\longrightarrow 0+$.

Wir können jetzt ein $\varepsilon'>0$ wählen, so daß $|\exp(F(z))|$ für $0<x\leq\varepsilon'$ und $t=1$ durch ein $K\geq 1$ beschränkt wird. Wie man sich leicht überlegt, nimmt die Funktion $Re(F(z))$ für festes x genügend nahe an Null und Variation von t auf $[-1,1]$ bei $t=+1$ ihren maximalen Wert an. Daraus schließen wir, es gibt ein $\varepsilon<\varepsilon'$, $\varepsilon>0$, mit $|\exp(F(\zeta))|\leq K$ für alle $\zeta\in S_\varepsilon(R)$.
Das ist die Behauptung (a).

Ist nun $R(x) = O(x^{1+\delta/2})$ irgendeine Randfunktion, dann gibt es ein $\varepsilon>0$ und ein $\beta>0$ mit $R(x)<\beta x^{1+\delta/2}$ für alle $x\in[0,\varepsilon]$, also gilt $S_\varepsilon(R) \subset S_\varepsilon(R_\beta)$. Die Gültigkeit von (*) ist eine unmittelbare Konsequenz dieser Tatsache.

Nun müssen wir noch zeigen

(b) $\qquad R(x) \neq O(x^{1+\delta/2}) \implies$ (*) ist nicht richtig

Dazu beschränken wir uns zunächst auf Randfunktionen $R(x)=o(x)$ für $x\longrightarrow 0+$ und setzen $y=tR(x)$ sowie $1-z := x+iy$ mit einem $t\in]0,1[$. Nach Voraussetzung ist $yx^{-1-\delta/2}$ unbeschränkt und es gilt $yx^{-1}\longrightarrow 0$, jeweils für $x\longrightarrow 0+$. Wir können daher folgern

$$\begin{aligned}(1-z)^{-\delta} &= x^{-\delta}\left(1+iyx^{-1}\right)^{-\delta}\\ &= x^{-\delta}\left(1-i\delta yx^{-1}-\frac{\delta(\delta+1)}{2}(yx^{-1})^2+o((yx^{-1})^3)\right)\end{aligned}$$

Da ferner $(1-|z|)^{-\delta} \geq x^{-\delta}$ für genügend kleine x, schließen wir weiter

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(F(z)) &\geq \frac{\delta(\delta+1)}{2}(yx^{-1})^2x^{-\delta}+o((yx^{-1})^3x^{-\delta})\\ &= \left(yx^{-1-\delta/2}\right)^2\left(\frac{\delta(\delta+1)}{2}+o(yx^{-1})\right)\end{aligned}$$

Der hier in der rechten Klammer stehende Ausdruck ist für ausreichend kleine x sicher positiv, daher ist $\mathrm{Re}(F(z))$ nicht-negativ und unbeschränkt für $x\longrightarrow 0+$, d.h., der Betrag $|\exp(F(z))| = \exp(\mathrm{Re}(F(z)))$ geht für $x\longrightarrow 0+$ über alle Grenzen. Das ist die Behauptung (b) für Randfunktionen $R(x)=o(x)$.

Im speziellen Fall $R(x)=\beta x^{1+\delta/4}$, $\beta>0$, erhalten wir bei sinngemäß gleicher Argumentation sogar $|\exp(F(z))| \longrightarrow \infty$ für $x\longrightarrow 0+$. Dies nutzen wir für den Beweis des allgemeinen Falls, wo wir nun noch $R(x)\neq o(x)$ betrachten müssen: Es existieren ein $\beta>0$ und eine Folge (x_n) mit $1>x_n>0$ für alle $n\geq 0$ sowie $x_n \longrightarrow 0$ für $n\longrightarrow\infty$, so daß

$$R(x_n) > \beta x_n > \beta\, x_n^{1+\delta/4}$$

für alle $n \geq 0$. Wir setzen $y_n := \beta x^{1+\delta/4}/2$ und $z_n := 1-x_n+iy_n$. Für vorgegebenes $\varepsilon>0$ und genügend große n liegen die z_n sicherlich in der Menge $S_\varepsilon(R/2)$. Nun ist aber der Ausdruck $|\exp(F(z_n))|$ nach Definition der z_n und der einleitenden Bemerkung für $n \longrightarrow \infty$ unbeschränkt. Damit haben wir (b) vollständig bewiesen. &

Bevor wir nun zu dem angedeuteten Satz kommen, treffen wir noch eine Vereinbarung.

2.3.2 DEFINITION

Für alle reellen $\delta>0$ setzen wir

$$P_\delta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\delta)} z^n := \exp\left((1-z)^{-\delta}\right)$$

Das Potenzreihenverfahren $[P_\delta; p_n^{(\delta)}; R]$, R geeignete Randfunktion, bezeichnen wir kurz mit $F_\delta(R)$. [1)]

2.3.3 SATZ

Ein Verfahren $F_\delta(R)$, $\delta>0$, ist permanent dann und nur dann, wenn $R(x) = O(x^{1+\delta/2})$ für $x \longrightarrow 0+$.

Beweis: Notwendig und hinreichend für die Permanenz eines Verfahrens $F_\delta(R)$ sind die beiden Bedingungen

(P1) $$\frac{1}{P_\delta(z)} = o_R(1)$$

(P2) $$\frac{P_\delta(|z|)}{P_\delta(z)} = O_R(1)$$

Dies leitet man aus bekannten Sätzen über die Permanenz sogenannter "stetiger" Verfahren (vgl. HARDY [19], Theorem 5, S. 49 f) und der

1 Der Buchstabe E ist schon für Euler-Verfahren belegt.

unschwer zu verifizierenden Tatsache, daß die Koeffizienten der generierenden Potenzreihe sämtlich positiv sind, leicht ab.

Wir setzen $1-z := x+iy$ und $|y| \le R(x)$. Mit $R(x) = O(x^{1+\delta/2}) = o(x)$ für $x \longrightarrow 0+$ finden wir

$$\begin{aligned} -(1-z)^{-\delta} &= -x^{-\delta}\left(1+i(yx^{-1})\right)^{-\delta} \\ &= -x^{-\delta}\left(1-i\delta(yx^{-1})+o(yx^{-1})\right) \end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, $yx^{-1} \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$. Es folgt daher

$$\frac{1}{P_\delta(z)} = \exp\left(-(1-z)^{-\delta}\right) = o_R(1)$$

für alle Randfunktionen mit $R(x) = o(x)$. Das ist (P1).

Die Behauptung (P2) ist nach Lemma 2.3.1 äquivalent mit $R(x) = O(x^{1+\delta/2})$. Damit sind wir bereits fertig. &

Durch den vorliegenden Satz werden augenfällige Beziehungen zwischen Randfunktionen auf der einen und Potenzreihenverfahren auf der anderen Seite geschaffen. Eine weitere Aussage in dieser Richtung beweisen wir im Anschluß an das folgende Lemma.

2.3.4 LEMMA

Sei R eine Randfunktion, g eine Funktion mit den Eigenschaften

(G1) $\quad g(1-z) = o_R(1)$

(G2) $\quad \exists c>0,\ r>0:\ \forall z \in S_r(R):\ |g(1-z)| \ge c \cdot |g(\mathrm{Re}(1-z))|$

und $\delta>0$ ein reeller Parameter.

Es gelten die folgenden beiden Aussagen

(i) $\quad R(x) = O(x^{\delta+1})$ *für* $x \longrightarrow 0+ \quad \Longleftrightarrow \quad \exp\left(i(1-z)^{-\delta}\right) = O_R(1)$

(ii) $\quad \exists\sigma>0\colon\ R(x) > \frac{1+\sigma}{\delta} x^{\delta+1} \left|\log|g(x)|\right|$ *für* $x \longrightarrow 0+$

$$\Longrightarrow\quad g(1-z)\exp\left(i(1-z)^{-\delta}\right) \neq O_R(1)$$

Beweis: Zu (i), "$\Longrightarrow$": Sei zunächst $R(x)=R_\beta(x) := \beta x^{\delta+1}$ mit $0\leq\beta<\infty$. Wir setzen $y=R(x)$ und $1-z := x+ity$ mit einem $t\in[-1,1]$. Es folgt

$$\begin{aligned} i(1-z)^{-\delta} &= i\left(x+i\beta t x^{\delta+1}\right)^{-\delta} \\ &= ix^{-\delta}\left(1-i\beta\delta t x^{\delta}+o(x^{\delta})\right) \\ &= \beta\delta t + ix^{-\delta} + o(1) \end{aligned}$$

für $x\longrightarrow 0+$, bzw. $z=1-x+iy\longrightarrow 1$. Demnach erhalten wir

(1) $$F(z) := \exp\left(i(1-z)^{-\delta}\right) = e^{\beta\delta t}\cdot e^{ix^{-\delta}}\cdot e^{o(1)}$$

für $x\longrightarrow 0+$. Wir wählen jetzt ein $\varepsilon>0$. Für $0<x\leq\varepsilon$, d.h. $z\in S_\varepsilon(R)$, wird der Absolutbetrag der rechten Seite in (1) durch ein $K\geq 1$ beschränkt. Diese Schranke ist unabhängig von t wählbar, denn die Funktion $|F(z)|$ nimmt bei Variation von t auf $[-1,1]$ und ausreichend kleine x ihr Maximum für $t=+1$ an. Folglich gilt – nach geeigneter Wahl von ε –

$$|F(\zeta)| \leq K \quad \text{für alle } \zeta\in S_\varepsilon(R)$$

Damit ist (i) für $R=R_\beta$ verifiziert.

Ist nun $R(x)=O(x^{\delta+1})$ irgendeine Randfunktion, dann gibt es ein $\varepsilon>0$ und ein β mit $R(x)<\beta x$ für alle $x\in[0,\varepsilon]$, also $S_\varepsilon(R)\subset S_\varepsilon(R_\beta)$. Hieraus folgt nun sofort die Evidenz des hinreichenden Teils von (i).

Zum Nachweis der Notwendigkeit ("$\Longleftarrow$") gehen wir aus von $R(x)\neq O(x^{\delta+1})$ und beschränken uns für's erste auf $R(x)=o(x)$ für $x\longrightarrow 0+$. Ferner setzen wir $y=tR(x)$ sowie $1-z:=x+iy$ mit einem $t\in]0,1[$. Nach Voraussetzung ist $yx^{-1-\delta}$ unbeschränkt für $x\longrightarrow 0+$. Andererseits zieht unsere Annahme $yx^{-1}\longrightarrow 0$ für $x\longrightarrow 0+$ nach sich. Deswegen können wir folgern

$$\begin{aligned} i(1-z)^{-\delta} &= ix^{-\delta}\left(1+i\,yx^{-1}\right)^{-\delta} \\ &= ix^{-\delta}\left(1-i\,\delta yx^{-1}+o(yx^{-1})\right) \\ &= \delta yx^{-1-\delta}+ix^{-\delta}+o(yx^{-1-\delta}) \quad \text{für } x\longrightarrow 0+ \end{aligned}$$

Daher ist

$$(2) \qquad |F(z)| = \exp\left(\delta yx^{-1-\delta}(1+o(1))\right) \text{ unbeschränkt für } x\longrightarrow 0+$$

also $F(z)\neq O_R(1)$. Für $R(x)=\beta x^{1+\delta/2}$, $\beta>0$, können wir sogar auf $|F(z)|\longrightarrow\infty$ für $x\longrightarrow 0+$ schließen.

Wir lassen nun die Beschränkung $R(x)=o(x)$ fallen und betrachten Randfunktionen $R(x)\neq o(x)$. In diesem Fall existieren ein $\beta>0$ und eine Folge (x_n) mit $1>x_n>0$ für alle $n\geq 0$ sowie $x_n\longrightarrow 0$ für $n\longrightarrow\infty$, so daß

$$R(x_n) > \beta x_n > \beta x_n^{1+\delta/2}$$

für alle $n\geq 0$. Wir setzen $y_n := \beta x_n^{1+\delta/2}/2$ und $z_n := 1-x_n+iy_n$. Für vorgegebenes $\varepsilon>0$ und genügend große n liegen die z_n sicherlich in der Menge $S_\varepsilon(R/2)$. Weil aber die Folge $\left(|(F(z_n))|\right)$ nach Wahl der z_n und obiger Bemerkung gegen ∞ konvergiert, wächst nun $|F(z)|$ in $S_\varepsilon(R/2)$ über alle Grenzen. Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen.
Zu (ii): In groben Zügen können wir dem Beweisteil zur Notwendigkeit der unter (i) formulierten Bedingung folgen. Wir notieren im wesentlichen nur die Abweichungen.
Nach Voraussetzung gilt nun $yx^{-1-\delta}\longrightarrow\infty$, weil ja $g(x)=o(1)$ für $x\longrightarrow 0+$. Dennoch werden wir auf eine zu (2) gleichlautende Beziehung geführt. Wir brauchen aber mehr. Mit Hilfe von (G2) und $\delta yx^{-1-\delta}>(1+\sigma)\,|\log|g(x)||$ für genügend kleine x folgt

$$(3) \qquad \begin{aligned} \left|g(1-z)\cdot F(z)\right| &\geq |g(1-z)|\,\exp\left(-(1+\sigma)\log|g(x)|\,(1+o(1)\right) \\ &\geq c\cdot|g(x)|\cdot|g(x)|^{-1-\sigma+o(1)} \\ &= c\,|g(x)|^{-\sigma+o(1)} \end{aligned}$$

Für ausreichend kleine aber noch positive x ist diese Ableitung richtig. Insbesondere gibt es ein $\varepsilon>0$, so daß der Exponent von $|g(x)|$ für alle $x\in]0,\varepsilon]$ unter $-\sigma+\sigma/2=-\sigma/2$ bleibt. Demnach gilt

$$\left|g(1-z)\cdot F(z)\right| \geq c\,|g(x)|^{-\sigma/2} \longrightarrow \infty$$

also $g(1-z)F(z)\neq O_R(1)$ für Randfunktionen R mit $R(x)=o(x)$. Der Rest folgt wie oben (s. Beweis zu (i)). &

2.3.5 SATZ

Sei $[P;p_n;R]$ ein Potenzreihenverfahren mit $p_n=0$ für höchstens endlich viele $n\geq 0$, g eine Funktion mit den Eigenschaften 2.3.4 (G1) und (G2) sowie $g(1-z)$ für genügend kleines $r>0$ holomorph in $[0,1[\,\cup S_r(R)$. Ferner sei $\delta>0$ ein beliebiger reeller Parameter.

Es existieren Folgen (s_n) und (t_n), so daß für alle Randfunktionen $\tilde{R}\leq R$ die folgenden Schlüsse gelten

(i) $\tilde{R}(x)=O(x^{\delta+1})$ für $x\longrightarrow 0+$

$\Longrightarrow$ (s_n) ist $[P;p_n;\tilde{R}]$-limitierbar

(ii) $\exists\sigma>0$: $\tilde{R}(x) > \frac{1+\sigma}{\delta}x^{\delta+1}\left|\log|g(x)|\right|$ für $x\longrightarrow 0+$

$\Longrightarrow$ (s_n) ist nicht $[P;p_n;\tilde{R}]$-limitierbar

(iii) $\tilde{R}(x)=O(x^{\delta+1})$ für $x\longrightarrow 0+$

$\Longleftrightarrow$ (t_n) ist $[P;p_n;\tilde{R}]$-beschränkt

Beweis: Wir definieren zunächst für alle $n\geq 0$

(1) $$r_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } p_n\neq 0\\ 1, & \text{falls } p_n=0\end{cases}$$

und setzen ganz formal

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} (p_n + r_n)\, s_n z^n := P(z)\, g(1-z) \exp\left(i(1-z)^{-\delta}\right)$$

und

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} (p_n + r_n)\, t_n z^n := P(z) \exp\left(i(1-z)^{-\delta}\right)$$

Die Summen $p_n + r_n$ sind definitionsgemäß für alle $n \geq 0$ von Null verschieden. Nach den Voraussetzungen über g machen daher beide Identitäten einen Sinn. Insbesondere sind (s_n) und (t_n) wohldefiniert. Sei nun $\tilde{R} \leq R$ irgendeine Randfunktion. Dann ist auch $[P;p_n;\tilde{R}]$ ein Potenzreihenverfahren und auf $\Phi_P[s_n]$ bzw. $\Phi_P[t_n]$ läßt sich Lemma 2.3.4 anwenden. In der Tat, da nur endlich viele der Koeffizienten p_n verschwinden, lassen sich die beiden Potenzreihen

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} r_n s_n z^n$$

und

$$T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} r_n t_n z^n$$

auf Polynome reduzieren. Demnach gilt sowohl

$$\frac{S(z)}{P(z)} = o_R(1)$$

als auch

$$\frac{T(z)}{P(z)} = o_R(1)$$

Zusammenfassend dürfen wir also schreiben

$$\Phi_P[s_n](z) = g(1-z) \exp\left(i(1-z)^{-\delta}\right) + o_R(1)$$

und

$$\Phi_P[t_n](z) = \exp\left(i(1-z)^{-\delta}\right) + o_R(1)$$

Damit sind wir fast am Ende:

(i) ist eine direkte Folge des hinreichenden Teils ("$\Longrightarrow$") von 2.3.4(i) und der Eigenschaft (G1).
(ii) gilt wegen 2.3.4(ii) in Verbindung mit (G1) und (G2).
(iii) folgt sofort aus 2.3.4(i). &

Man beachte, daß die in 2.3.4 eingeführte Funktion $g(1-z)$ beim Grenzübergang $z \longrightarrow 1$ beliebig langsam gegen Null streben darf. Daher kann auch die zwischen 2.3.5(i) und (ii) immer bestehende Lücke durch entsprechende Wahl von g fast nach Belieben enger gefaßt werden. Einschränkend wirken hier nur die schwachen Voraussetzungen an g. In einem gewissen Sinne mißt g die Größe der Lücke. Zulässige "Maßfunktionen" haben wir z.B. in $g(z)=z^{\varepsilon}$, $\varepsilon>0$.

3. Allgemeine Theorie

3.1 Mit Momentenfolgen zusammenhängende Sätze

Für gewöhnliche Potenzreihenverfahren, d.h. also für Potenzreihenverfahren mit verschwindender Randfunktion, wurden die wesentlichen Aspekte der nun folgenden Aussagen in der Literatur bereits erschöpfend diskutiert. Es sind hier vor allem BORWEIN (s. [6] und [7]) und HOISCHEN (s. [20]) zu nennen. Bezüglich Potenzreihenverfahren mit nicht-entarteter Randfunktion fehlen hingegen entsprechende Literaturstellen. Indes, die Übertragung der Beweisverfahren auf den allgemeinen Fall nicht-verschwindender Randfunktionen bleibt stets relativ simpel.

Die wichtigste Aussage dieses Abschnitts macht Satz 3.1.2. Es handelt sich hierbei um **den** zentralen Satz für den Stärkevergleich von Potenzreihenverfahren. Gegenüber dem Originalbeweis für reelle Limitierung (Grenzübergang $z=\mathrm{Re}(z)\longrightarrow 1$) benötigen wir als einziges Zusatzargument die Behauptung des folgenden Lemmas.

3.1.1 LEMMA

Sei R eine Randfunktion sowie r,t reell mit $0<r<1$ und $1-{}^{r}/_{2}<t\leq 1$. Dann gilt

$$z\in S_{r/2}(R) \implies tz\in S_r(R)$$

Beweis: Sei $z\in S_{r/2}(R)$. Nach Definition 1.2.2 haben wir

$$0<1-\mathrm{Re}(z)\leq {}^{r}/_{2} \quad \text{und} \quad |\mathrm{Im}(z)|\leq |R(1-\mathrm{Re}(z))|.$$

Es folgt

$$1-\mathrm{Re}(tz) \leq 1-\left(1-\frac{r}{2}\right)\mathrm{Re}(z)$$

$$= 1 - \mathrm{Re}(z) + \frac{r}{2}\mathrm{Re}(z)$$

$$\le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Weiter schließen wir aufgrund von

$$1 - \mathrm{Re}(z) \le 1 - t\,\mathrm{Re}(z) \le 1 - \mathrm{Re}(tz)$$

und der Monotonie von R

$$|\mathrm{Im}(tz)| \le |\mathrm{Im}(z)| \le |R(1-\mathrm{Re}(z))| \le |R(1-\mathrm{Re}(tz))|$$

Damit haben wir $tz \in S_r(R)$ gezeigt. &

Wir kommen nun zu dem angekündigten Satz. Für R≡0 geht der Beweis auf HOISCHEN zurück (s. [20], Theorem 1, S. 229 ff), der auch die Notwendigkeit der Voraussetzung (iv) nachweist. Die zugrundeliegende Idee wird schon von HARDY (s. [19] 4.14, S. 84 und 11.18, S 275 f) dargestellt. BORWEIN (s. [7] Lemmata 1 und 2, S 318 f) wendet das Beweisprinzip speziell auf Abel-Verfahren an (vgl. Satz 4.1.2).

3.1.2 SATZ

Seien $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei Potenzreihenverfahren. Weiter sei* $\chi \in BV([0,1])$ *mit*

(i) $$\int_0^1 |d\chi(t)| < \infty$$

und (μ_n) *eine Momentenfolge mit*

(ii) $$\mu_n = \int_0^1 t^n \, d\chi(t) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Unter den Voraussetzungen

(iii) $$q_n = \mu_n \, p_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(iv) $\int_0^1 |P(tz)|\,|d\chi(t)| = O(1)\,|Q(z)|$ *für* $z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$

gilt dann $[P;p_n;R] \subset [Q;q_n;R]$

Beweis: Sei (s_n) eine $[P;p_n;R]$-limitierbare Folge. Wir setzen

(1) $$\Phi_P[s_n](z) = \frac{1}{P(z)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n z^n$$

(2) $$\Phi_Q[s_n](z) = \frac{1}{Q(z)} \sum_{n=0}^{\infty} q_n s_n z^n$$

Nach Definition der $[P;p_n;R]$ - Limitierbarkeit ist die unter (1) aufgeschriebene Potenzreihe in einer Umgebung des Nullpunkts konvergent und läßt sich in ein Gebiet $D_P \supset [0,1[$ hinein holomorph fortsetzen. Außerdem gibt es ein $r_0 > 0$, so daß $S_{r_0}(R) \subset D_P$.

Der Konvergenzradius der unter (2) notierten Reihe ist wegen $q_n = \mu_n p_n$ und $\mu_n = O(1)$ für $n \longrightarrow \infty$ sicher nicht kleiner als der Konvergenzradius der Reihe (1). Daher ist Φ_Q in der genannten Umgebung des Nullpunktes wohldefiniert. Folglich können wir nach Maßgabe von (ii) und (iii) in (2) Integration und Summation vertauschen und werden so auf

(3) $$\Phi_Q[s_n](z) = \frac{1}{Q(z)} \int_0^1 P(tz)\, \Phi_P(tz)\, d\chi(t)$$

geführt. Diese Darstellung gilt zunächst nur in einer genügend kleinen Umgebung des Nullpunktes, man entnimmt ihr aber unmittelbar, daß auch Φ_Q für geeignet gewähltes $r > 0$ in einem Gebiet $D_Q \supset [0,1[\cup S_r(R)$ holomorph ist.

Nach Voraussetzung (iv) gibt es zu vorgegebenem $r_1 > 0$ eine Konstante $K_1 > 0$, so daß für alle $z \in S_{r_1}(R)$

(4) $$\int_0^1 |P(tz)|\,|d\chi(t)| < K_1 |Q(z)|$$

O.B.d.A. sei nun $[P;p_n;R]$-lim $s_n = 0$. Wir wählen ein beliebiges $\tau\in[0,1[$ und unabhängig hiervon ein $\varepsilon>0$. Ferner setzen wir $\varepsilon_1 := \varepsilon/2K$. Definitionsgemäß existiert nun ein $r>0$, $r<r_0$, $r<r_1$ mit

$$\left|\Phi_P[s_n](z)\right| < \varepsilon_1 \quad \text{für alle } z\in S_{2r}(\tau R)$$

Lemma 3.1.1 zufolge können wir hieraus auf

$$\left|\Phi_P[s_n](tz)\right| < \varepsilon_1 \quad \text{für alle } z\in S_r(\tau R),\ 1\geq t>1-r$$

schließen.

Da Φ_P und P im Nullpunkt holomorph und längs der reellen Achse analytisch fortsetzbar sind, gibt es Konstanten $K_2, K_3>0$ mit $|\Phi_P(tz)| < K_2$ und $|P(tz)| < K_3$ für $z\in S_{2r}(\tau R)$, $0\leq t\leq 1-r$. Ferner setzen wir

$$K_4 := \int_0^1 |d\chi(t)|$$

und hiermit $\varepsilon_2 := \dfrac{\varepsilon}{2K_2K_3K_4}$.

Aufgrund von Definition 1.2.3 ist $\dfrac{1}{Q(z)} = o_R(1)$, also gilt, wenn wir nur $r_2>0$ genügend klein wählen,

$$\left|\frac{1}{Q(z)}\right| < \varepsilon_2 \text{ für alle } z\in S_{r_2}(\tau R)$$

Wir definieren jetzt $\delta := \min(r,r_2)$ und können dann für alle $z\in S_\delta(\tau R)$ schließen

$$\left|\Phi_Q(z)\right| \leq \frac{1}{|Q(z)|}\int_0^1 |P(tz)|\,|\Phi_P(tz)|\,|d\chi(t)|$$

$$\leq \frac{1}{|Q(z)|} \int_0^{1-r} |P(tz)|\,|\Phi_P(tz)|\,|d\chi(t)|$$

$$+ \frac{1}{|Q(z)|} \int_{1-r}^{1} |P(tz)|\,|\Phi_P(tz)|\,|d\chi(t)|$$

$$\leq \frac{1}{|Q(z)|} \cdot \sup_{0\leq t\leq 1-r} |P(tz)| \cdot \sup_{0\leq t\leq 1-r} |\Phi_P(tz)| \cdot \int_0^1 |d\chi(t)|$$

$$+ \frac{1}{|Q(z)|} \int_0^1 |P(tz)|\,|d\chi(t)| \cdot \sup_{1-r\leq t\leq 1} |\Phi_P(tz)|$$

$$< \varepsilon_2 K_2 K_3 K_4 + K_1 \varepsilon_1$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Demnach haben wir bewiesen

$$\forall \tau \in [0,1[:\ \forall \varepsilon > 0:\ \exists \delta > 0:\ \forall z \in S_\delta(\tau R):\ |\Phi_Q(tz)| < \varepsilon$$

also gilt $[Q;q_n;R]\text{-}\lim s_n = 0$. Damit ist der Satz verifiziert. &

Die problematische Bedingung (iv) des vorstehenden Satzes läßt sich in vielen praktisch relevanten Fällen vereinfachen. In diese Richtung zielt zum Beispiel der folgende, im Kern von BORWEIN herrührende Hilfssatz (s. [6], Proof of Theorem A, S. 345). Dieser Autor betrachtet allerdings nur verschwindende Randfunktionen und kann infolgedessen auf die untenstehende Voraussetzung 3.1.3 (ii) verzichten.

Im Anschluß daran formulieren wir ein bezüglich Stolz'scher Randfunktionen (s. Definition 2.1.6 und die hinführenden Bemerkungen) hinreichend bekanntes Lemma in Termen der in Kapitel 2 entwickelten Systematik. Es handelt sich hierbei um eine triviale Verallgemeinerung des Standard-Resultats, die wir nur der Vollständigkeit halber aussprechen. Jener Hilfssatz (3.1.4) ist der einfachste Vertreter einer ganzen Klasse rein technischer

Aussagen über die Beschränktheit eines relevanten Quotienten beim Grenzübergang $z \longrightarrow 1$ in einem geeigneten Stolz-Gebiet. Sätze dieses Typs können sowohl für Permanenzaussagen (s. etwa Lemma 2.3.1/Satz 2.3.2, Bemerkung 4.1.1 oder Lemma 4.2.3/Satz 4.2.4) als auch zum Nachweis von Inklusionsbeziehungen zwischen Potenzreihenverfahren die mit Momentenfolgen zusammenhängen (s. Satz 4.1.2) herangezogen werden.

3.1.3 LEMMA

Seien $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei Potenzreihenverfahren mit* p_n, $q_n \geq 0$. *Wenn es ein* $K>0$ *gibt, so daß*

(i) $$p_n \int_0^1 t^n \, |d\chi(t)| \leq K\, q_n \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

(ii) $$Q(|z|) = O(|Q(z)|) \quad \textit{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

so gilt

$$\int_0^1 |P(tz)|\, |d\chi(t)| = O(1)\, |Q(z)| \quad \textit{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

Beweis: Wir haben für $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |P(tz)|\, |d\chi(t)| &\leq \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} p_n |tz|^n \, |d\chi(t)| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_0^1 t^n \, |d\chi(t)| \; |z|^n \\ &\leq K \sum_{n=0}^{\infty} q_n |z|^n \\ &= K\, Q(|z|) \end{aligned}$$

&

Wir kommen nun zu dem bereits angesprochenen, in anderer Formulierung allseits bekannten Hilfssatz. Im Sinne einer einheitlichen Darstellung verzichten wir auf einen hier wohl möglichen kürzeren und eleganteren Beweis und demonstrieren stattdessen die in ähnlich gelagerten Fällen stets verwendete Methode (s. 2.3.1, 2.3.4 oder 4.2.3).

3.1.4 LEMMA

Sei R eine Randfunktion. Es gilt

$$(*) \qquad \frac{|1-z|}{1-|z|} = O(1) \quad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

genau dann, wenn $R(x) = O(x)$ *für* $x \longrightarrow 0+$.

Beweis: Zunächst sei $R(x) = R_t(x) := tx$ mit $0 \le t < \infty$. Wir setzen $x+iy =: 1-z$. Es folgt, jeweils für $x \longrightarrow 0+$,

$$\begin{aligned} 1-|z| &= 1-(1-x)\left(1+y^2(1-x)^{-2}\right)^{1/2} \\ &= 1-(1-x)\left(1+t^2x^2(1+o(1))\right)^{1/2} \\ &= 1-(1-x)\left(1+o(x^2)\right) \\ &= x(1+o(1)) \end{aligned}$$

sowie

$$|1-z| = x\sqrt{1+t^2}$$

demnach also

$$(1) \qquad \frac{|1-z|}{1-|z|} = \sqrt{1+t^2} + o(1)$$

Wir wählen nun ein $\delta > 0$. Für $x > 1-\delta$, d.h., $z \in S_\delta(R)$, wird die rechte Seite von (1) durch ein $K \ge 1$ beschränkt. Sei jetzt $\zeta \in S_\delta(R)$. Dann gibt es ein $r \in [-1,1]$ und ein $z \in S_\delta(R)$, so daß $1-\zeta = x+iry$. Folglich können wir schliessen $|\zeta| \le |z|$ sowie $|1-\zeta| \le |1-z|$, also auch

$$\frac{|1-\zeta|}{1-|\zeta|} \le \frac{|1-z|}{1-|z|} \le K$$

Nach Umbenennung von ζ in z folgt daher sofort (*) für $R = R_t$. Ist nun $R(x) = O(x)$ irgendeine Randfunktion, dann existiert per definitionem ein $\delta>0$ und ein $t>0$, so daß $S_\delta(R) \subset S_\delta(R_t)$. Deswegen ist (*) für alle fraglichen Randfunktionen evident.

Zum Nachweis der Notwendigkeit der angegebenen Bedingung nehmen wir $R(x) \neq O(x)$ an.
Aufgrund dieser Annahme ist der Quotient $R(x)/x$ für $x \longrightarrow 0+$ nicht beschränkt. Nun gilt aber mit $1-z := x+iy$ und $y = R(x)$

$$|1-z| = x\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{1/2} \ge y$$

sowie

$$1-|z| \le 1-(1-x) = x$$

also ist

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \ge \frac{y}{x} \quad \text{für } x \longrightarrow 0+ \quad \text{nicht beschränkt}$$

Daher ist (*) für $R(x) \neq O(x)$ nicht erfüllt. &

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von 3.1.3(ii) beweisen. Es stehen uns dann genügend Mittel zur Anwendung des Momentenfolgen-Vergleichssatzes 3.1.2 zu Gebote. In diesem Zusammenhang sei auf Abschnitt 3.3 und Kapitel 4 verwiesen.

3.1.5 LEMMA

Sei R eine Randfunktion mit $R(x)=O(x)$, $x \longrightarrow 0+$. Für ein $\alpha>-1$ gelte $p_n = O(n^\alpha)$,

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

sowie

$$\frac{1}{P(z)} = O(|1-z|^{\alpha+1}) \quad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z\in S(R)$$

Dann haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n|\,|z|^n = O(P(z)) \quad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z\in S(R)$$

Beweis: Wegen $n^{-\alpha}\binom{n+\alpha}{n} \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} > 0$ für $n \longrightarrow \infty$, gibt es ein $K_1 > 0$, so daß

$$|p_n| < K_1\binom{n+\alpha}{n}$$

Demnach gilt für $|z| < 1$

$$\tilde{P}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} |p_n|\,|z|^n < K_1\,(1-|z|)^{-\alpha-1}$$

Andererseits existiert ein $\delta>0$ und ein $K_2>0$ mit

$$\frac{1}{|P(z)|} < K_2\ |1-z|^{\alpha+1} \quad \text{für alle } z\in S_\delta(R)$$

Es folgt sofort

$$\frac{\tilde{P}(z)}{|P(z)|} < K_1 K_2 \left(\frac{|1-z|}{1-|z|}\right)^{\alpha+1}$$

Nach Lemma 3.1.4 ist der geklammerte Ausdruck für $z \longrightarrow 1$, $z\in S(R)$ beschränkt. Damit haben wir die Aussage verifiziert. &

Wir besprechen nun noch eine spezielle, für nicht-entartete Randfunktionen und Abel-Verfahren auf BORWEIN (s. [8] (IV)* , S. 75 und [7] Lemma 4, S. 321) zurückgehende Aussage über den Einfluß gewisser Momentenfolgen-Faktoren auf den Grenzwert einer $[P;p_n;R]$-limitierbaren Folge (s_n). BORWEIN betrachtet hier nur die Momentenfolge $1/_{n+a}$. Mit Hilfe des Vergleichssatzes 3.1.2 können wir indessen die Behauptung um einiges allgemeiner fassen.

3.1.6 LEMMA

Sei $[P;p_n;R]$ *ein Potenzreihenverfahren,* $\chi \in BV([0,1])$ *und*

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \, d\chi(t)$$

eine Momentenfolge. Ferner seien die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $$\int_0^1 |P(tz)| \, |d\chi(t)| = O\left(\int_0^1 P(tz) \, d\chi(t) \right) \quad \textit{für } z \longrightarrow 1, \ z \in S(R)$$

(ii) $$\left(\int_0^1 P(tz) \, d\chi(t) \right)^{-1} = o(1) \quad \textit{für } z \longrightarrow 1, \ z \in S(R)$$

Dann gilt

$$[P;p_n;R]\text{-}\lim s_n = s \quad \Longrightarrow \quad [P;p_n;R]\text{-}\lim \mu_n s_n = 0$$

Beweis: **Sei $[P;p_n;R]$-lim $s_n = s$. Wir setzen**

$$Q(z) := \int_0^1 P(tz) \, d\chi(t) \qquad \text{und} \qquad q_n := \mu_n p_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Aufgrund dieser Integraldarstellung "erbt" Q von P die Holomorphieeigenschaft in einem geeigneten Gebiet $D \supset [0,1[\, \cup \, S_\delta(R)$, $\delta > 0$. Ferner gilt offensichtlich

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

mit $Q(z) \neq 0$ für $z \in [0,1[$ und wegen (i) auch

$$1/Q(z) = o_R(1) \quad ,$$

d.h., $[Q;q_n;R]$ ist ein Potenzreihenverfahren. Satz 3.1.2 erlaubt uns den Schluß auf $[Q;q_n;R]$-lim $s_n = s$. Demnach ist $\Phi_Q[s_n](z) = O_R(1)$. Also hat die Bedingung (ii)

$$\frac{1}{P(z)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mu_n s_n z^n = \frac{Q(z)}{P(z)} \, \Phi_Q[s_n](z)$$

$$= o_R(1) \; O_R(1) = o_R(1)$$

zur Folge, womit der Hilfssatz verifiziert ist. &

Dieses Lemma mündet unmittelbar in einen bisher nicht beachteten Translativitätssatz:

3.1.7 SATZ

Sei $[P;p_n;R]$ *ein Potenzreihenverfahren. Es gelten die folgenden Aussagen*

(i) *Wenn zu der durch* $\mu_n^{(1)} := \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1$, $n \geq 0$ *definierten Folge ein* $\chi_1 \epsilon BV([0,1])$ *existiert, so daß* $\mu_n^{(1)} = \int\limits_0^1 t^n \, d\chi_1(t)$ *(dies bedingt:* $\mu_n^{(1)}$ *ist eine Momentenfolge) und die Voraussetzungen 3.1.6 (i) und (ii) erfüllt sind, dann ist* $[P;p_n;R]$ *ein links-translatives Verfahren.*

(ii) *Wenn die unter (i) formulierten Voraussetzungen analog auf* $\mu_n^{(2)} := 1 - \frac{p_{n-1}}{p_n}$, $n \geq 0$, *zutreffen, dann ist* $[P;p_n;R]$ *ein rechts-translatives Verfahren.*

Beweis: Zu (i). Wir müssen zeigen

$$s_n \longrightarrow s \; [P;p_n;R] \implies s_{n-1} \longrightarrow s \; [P;p_n;R]$$

O.B.d.A. sei $s_{-1} := 0$. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_{n-1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} s_n z^{n+1}$$

$$= z \sum_{n=0}^{\infty} (p_n + \mu_n^{(1)} p_n) s_n z^n$$

$$= z \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n z^n + z \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mu_n^{(1)} s_n z^n$$

Folglich ist

$$(1) \qquad \Phi_P[s_{n-1}](z) = z\,\Phi_P[s_n](z) + z\,\Phi_P[\mu_n^{(1)} s_n](z)$$

Aufgrund von Lemma 3.1.6 ergibt sich hieraus die Behauptung unmittelbar.
Wir kommen nun zu (ii) und damit zur Inklusion

$$s_n \longrightarrow s\ [P;p_n;R] \implies s_{n+1} \longrightarrow s\ [P;p_n;R]$$

Der Beweis läuft völlig analog:

$$z \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} s_n z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - \mu_n^{(2)} p_n) s_n z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_n s_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n^{(2)} s_n z^n$$

Als Entsprechung zu (1) gilt jetzt

$$(2) \qquad z\,\Phi_P[s_{n+1}](z) = \Phi_P[s_n](z) - \Phi_P[\mu_n^{(2)} s_n](z) + \frac{p_0(1-\mu_0^{(2)})}{P(z)}$$

Wieder erlaubt uns Lemma 3.1.6 den gewünschten Schluß (Man beachte $P(z)^{-1} = o_R(1)$). &

3.2 Durch PE-Folgen induzierte Sätze

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir Aussagen über Potenzreihenverfahren auf Basis einer Integraltransformation gewonnen. Dies ist die übliche Methode zur Behandlung von Fragestellungen die mit Potenzreihenverfahren zusammenhängen. Bei ausschließlicher Betrachtung reeller Limitierung, also verschwindender Randfunktionen, sogar in vielen Fällen der einzig gangbare Weg. Nun wollen wir versuchen, eine "Differentialtransformation" herzuleiten und mit deren Hilfe einige interessante, neuartige Beziehungen aufdekken. Hierbei wird der Begriff der Randfunktion an entscheidender Stelle zur Geltung kommen.

Wir beginnen mit dem folgenden, fast schon trivialen Satz:

3.2.1 SATZ

Seien $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei Potenzreihenverfahren,* (s_n) *irgendeine Folge und* $\Phi_P[s_n]$ *holomorph in einem Gebiet* $D \supset [0,1[$. *Wenn es nun zwei auf D holomorphe Funktionen* Ω *und* ω *gibt, so daß*

$$\Phi_Q[s_n](z) = \Omega(z) + \omega(z)\,\Phi_P[s_n](z)$$

dann ist $\Phi_Q[s_n]$ *holomorph auf D und es gelten die beiden Schlüsse*

(i) $\Phi_P[s_n] = O_R(1)\ ,\ \Omega = O_R(1)\ ,\ \omega = O_R(1)$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_Q[s_n] = O_R(1)$$

(ii) $\Phi_P[s_n] = o_R(1)\ ,\ \Omega = o_R(1)\ ,\ \omega = O_R(1)$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_Q[s_n] = o_R(1)$$

Die aus diesem unmittelbar Satz fließende Folgerung enthält bereits die Grundidee für das Weitere.

3.2.2 KOROLLAR

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.1 nehmen speziell an, es gebe eine Darstellung

$$\Omega(z) + \omega(z)\,\Phi_P[s_n](z) = \sum_{k=0}^{m} \omega_k(z)\,\Phi_P^{(k)}[s_n](z)$$

mit $m \in \mathbb{N}$ *und* ω_k *holomorph in* D *für* $0 \le k \le m$.
Dann gelten die beiden Aussagen

(i) $\quad \omega_k(z)\,\Phi_P^{(k)}[s_n](z) = O_R(1)$ *für* $0 \le k \le m$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_Q[s_n](z) = O_R(1)$$

(ii) $\quad \omega_k(z)\,\Phi_P^{(k)}[s_n](z) = o_R(1)$ *für* $0 \le k \le m$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_Q[s_n](z) = o_R(1)$$

Beweis: Klar! &

Mit Hilfe der Ergebnisse von Abschnitt 2.2 können wir nun schon einen ersten Vergleichssatz beweisen. Die Voraussetzung "R nicht-entartet" ist dabei wesentlich. In der Tat, für verschwindende Randfunktionen hat der in Rede stehende Satz kein Analogon.

3.2.3 SATZ

Sei R *eine nicht-entartete Randfunktion sowie* $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei Potenzreihenverfahren,* (s_n) *irgendeine Folge und* $\Phi_P[s_n]$ *holomorph in einem Gebiet* $D \supset [0,1[\cup S_\delta(R)$, $\delta > 0$ *geeignet. Ferner sei* $h \in HR(R)$ *eine glatte und totale Randabstandsfunktion und es gebe Funktionen* f_k, $0 \le k \le m$, *so daß*

(1) $$\Phi_Q[s_n](z) = \sum_{k=0}^{m} f_k(z)\,z^k\,\Phi_P^{(k)}[s_n](z)$$

mit

(2) $\qquad f_k = O_R(h^k), \ 0 \le k \le m$

Die beiden folgenden Behauptungen sind richtig

(i) $\qquad \Phi_P[s_n](z) = O_R(1) \implies \Phi_Q[s_n](z) = O_R(1)$

(ii) $\qquad \Phi_P[s_n](z) = o_R(1) \implies \Phi_Q[s_n](z) = o_R(1)$

Beweis: Sei $\Phi_P[s_n](z) = O_R(1)$. Dann gilt nach Satz 2.2.6(i)

(3) $\qquad \Phi_P^{(k)}[s_n](z) = O_R(h^{-k})$

Aufgrund der Voraussetzung $f_k = O_R(h^{-k})$ folgt weiter

(4)
$$\begin{aligned} f_k(z)\,\Phi_P^{(k)}[s_n](z) &= O_R(h^k)\,O_R(h^{-k}) \\ &= O_R(1) \end{aligned}$$

und daher

(5) $\qquad \Phi_Q[s_n](z) = O_R(1)$

Damit ist (i) verifiziert.
Zum Nachweis von (ii) stützt man sich auf Satz 2.2.6(ii) und wird so auf

(6) $\qquad f_k(z)\,\Phi_P^{(k)}[s_n](z) = O_R(h^k)\,o_R(h^{-k})$

geführt, womit man unschwer die zu (5) analoge Beziehung

(7) $\qquad \Phi_Q[s_n](z) = o_R(1)$

herleitet. &

Aufgrund der notierten Voraussetzungen ist klar, daß der eben bewiesene Satz für "klassische" Potenzreihenverfahren (d.h. Potenzreihenverfahren

mit verschwindender Randfunktion) in dieser Formulierung keinen Sinn macht bzw. trivial ist. Die Bedingung 3.2.3 (2) bedeutet für $R\equiv 0$ nämlich $f_k\equiv 0$ für $k>0$, da mit R natürlich auch alle Randabstandsfunktionen $h\in HR(R)$ identisch verschwinden (s. Definition 2.1.1). Unklar ist jedoch noch, ob, von trivialen Fällen einmal abgesehen, überhaupt Funktionen f_k, $0\le k\le m$, $m\in\mathbb{N}$, existieren, so daß, eventuell unter geeigneten Zusatzannahmen, die Transformationsbedingung 3.2.3 (1) und die Größenordnungsbedingung 3.2.3 (2) erfüllt sind.

Das Existenzproblem bezüglich der Transformationsbedingung werden wir im Rahmen von Satz 3.2.8 erledigen. Die Größenordnungsbedingung behandeln wir in Lemma 3.2.9.

Grundlegend für den Beweis des genannten Satzes ist das nachfolgend formulierte Lemma 3.2.7. Zur Verkürzung der Schreibweise schicken wir noch eine Definition voraus.

3.2.4 DEFINITION

Sei T ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Eine Folge (t_n) nennen wir ***polynom-erzeugte-Folge*** *oder kurz* ***PE-Folge****, wenn für alle $n\ge 0$ $t_n = T(n)$.*

Ist m der Grad des Polynoms T, so bezeichnen wir (t_n) auch genauer als PE^m-Folge oder sagen, (t_n) sei eine PE-Folge vom Grade m.

Bevor wir zu dem angekündigten Lemma kommen, notieren wir noch zwei simple Behauptungen, deren Beweis wir uns ersparen können.

3.2.5 BEMERKUNG und DEFINITION

Für alle $k,n\in\mathbb{N}$ gilt

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \sum_{j=0}^{k} c_j^{(k)} n^j$$

mit $c_0^{(0)} := 1$

$c_j^{(k)} := 0$ für $j>k$ und $j<0$

$$c_j^{(k+1)} := c_{j-1}^{(k)} - k\, c_j^{(k)} \quad \text{sonst}$$

Insbesondere ist $c_k^{(k)} = 1$.

3.2.6 BEMERKUNG und DEFINITION

Für alle $k,n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n^k = \sum_{j=0}^{k} d_j^{(k)}\, n(n-1)\cdots(n-j+1)$$

mit

$$d_0^{(0)} := 1$$

$$d_j^{(k)} := 0 \qquad \text{für } j>k \text{ und } j<0$$

$$d_j^{(k+1)} := d_{j+1}^{(k)} + j\, d_j^{(k)} \quad \text{sonst}$$

Insbesondere ist $d_k^{(k)} = 1$.

Die Größen $c_j^{(k)}$ bzw. $d_j^{(k)}$ heißen *Stirlingsche Zahlen erster* bzw. *zweiter Art.*

3.2.7 LEMMA

Sei $q_n = p_n d_n$ und (d_n) eine PE-Folge vom Grade $m \in \mathbb{N}$, also etwa

(1) $$d_n = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k$$

mit geeigneten a_k, $0 \le k \le m$. Weiter seien P und Q nullstellenfrei auf $[0,1[$ sowie holomorph in einem Gebiet $D \supset [0,1[$.

Dann gibt es eindeutig bestimmte Funktionen f_k, $0 \le k \le m$, so daß für jedes Gebiet D', $[0,1[\subset D' \subset D$ in welchem P und Q nicht verschwinden (i), (ii) und (iii) gelten. Insbesondere existiert ein solches Gebiet.

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

(2) $$\frac{q_n z^n}{Q(z)} = \sum_{k=0}^{m} f_k(z)\, z^k \left[\frac{p_n z^n}{P(z)}\right]^{(k)}$$

(ii) *Die f_k sind allesamt holomorph*

(iii) *Ausgehend von*

(3) $$f_m(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} a_m$$

lassen sich die f_k für $k = m, m-1, \cdots, 2, 1, 0$ gemäß

(4) $$f_k(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} a_k - \sum_{l=k+1}^{m} P(z)\, f_l(z) \sum_{j=0}^{l-k} \binom{l}{j} \left(\frac{1}{P(z)}\right)^{(j)} c_k^{(l-j)} z^j$$

durch Rücksubstitution berechnen.

Beweis: Die Nullstellen von P und Q liegen diskret und können sich in D nicht häufen. Also existiert ein Gebiet $D' \supset [0,1[$ aber $D' \subset D$ in welchem P und Q nicht verschwinden.

Wir beginnen mit dem Beweis zu (i), indem wir ein Polynom F durch

$$F(n) := d_n \quad \text{für alle } n \geq 0$$

definieren – ein solches Polynom gibt es, da (d_n) eine PE-Folge ist – und zunächst zeigen, daß mit den f_k nach (3) und (4) sowie

(5) $$F^*(n,z) := Q(z) \sum_{k=0}^{m} f_k(z)\, z^{k-n} \left(\frac{z^n}{P(z)}\right)^{(k)}$$

für alle $z \in D'$, $n \in \mathbb{N}$

(6) $$F(n) = F^*(n,z)$$

gilt. Aufgrund von

$$(7)\qquad \begin{aligned} z^{k-n}\left(\frac{z^n}{P(z)}\right)^{(k)} &= z^{k-n}\sum_{j=\max(0,k-n)}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{P(z)}\right)^{(j)}\cdot \\ &\qquad \cdot n(n-1)\cdots(n-(k-j)+1)\, z^{n-(k-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{P(z)}\right)^{(j)} n(n-1)\cdots(n-(k-j)+1)\, z^j \end{aligned}$$

ergibt sich mit $c_l^{(k-j)}$ entsprechend Bemerkung 3.2.5

$$(8)\qquad z^{k-n}\left(\frac{z^n}{P(z)}\right)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-l}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{P(z)}\right)^{(j)} c_l^{(k-j)}\, n^l\, z^j$$

Insbesondere ist der hier links stehende Term für jedes $z \in D'$ ein Polynom in n vom Grade k, denn der Koeffizient von n^k ist gerade

$$(9)\qquad \frac{1}{P(z)}\, c_k^{(k)} = \frac{1}{P(z)} \neq 0,\ z \in D'$$

Demnach erweist sich

$$(10)\qquad \begin{aligned} F^*(n,z) &= Q(z)\sum_{k=0}^{m} f_k(z)\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-l}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{P(z)}\right)^{(j)} c_l^{(k-j)}\, n^l\, z^j \\ &= Q(z)\sum_{k=0}^{m}\sum_{k=l}^{m} f_k(z)\sum_{j=0}^{k-l}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{P(z)}\right)^{(j)} c_l^{(k-j)}\, n^l\, z^j \end{aligned}$$

als ein Polynom in n vom Grade m.
Mit der Vereinbarung

$$(11)\qquad g_{lk}(z) := \sum_{j=0}^{k-l}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{P(z)}\right)^{(j)} c_l^{(k-j)}\, z^j$$

können wir dies kürzer in der Form

$$F^*(n,z) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=l}^{m} g_{lk}(z)\, Q(z)\, f_k(z)\, n^l \tag{12}$$

fassen. Nach Wahl der f_k, $0 \le k \le m$, haben wir

$$\frac{Q(z)}{P(z)} f_l(z) + \sum_{k=l+1}^{m} g_{lk}(z)\, Q(z)\, f_k(z) = a_l, \quad 0 \le l \le m \tag{13}$$

Wegen

$$g_{ll}(z) = \frac{c_l^{(l)}}{P(z)} = \frac{1}{P(z)} \tag{14}$$

bedeutet dies

$$\sum_{k=l}^{m} g_{lk}(z)\, Q(z)\, f_k(z) = a_l, \quad 0 \le l \le m. \tag{15}$$

Daher ist für alle $z \in D'$, $n \in \mathbb{N}$

$$F^*(n,z) = \sum_{l=0}^{m} a_l\, n^l = F(n) \tag{16}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{q_n z^n}{Q(z)} &= \frac{1}{Q(z)} \cdot p_n\, d_n\, z^n \\ &= \frac{1}{Q(z)}\, p_n\, Q(z) \sum_{k=0}^{m} f_k(z)\, z^{k-n} \left(\frac{z^n}{P(z)} \right)^{(k)} \cdot z^n \\ &= \sum_{k=0}^{m} f_k(z)\, z^k \left(\frac{p_n z^n}{P(z)} \right)^{(k)} \end{aligned} \tag{17}$$

Damit ist die Existenz der f_k bewiesen. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, daß (2) auch für Funktionen $\tilde{f}_k$, $0 \le k \le m$, erfüllt ist. Ausgehend von Formel (5) — nun mit Tilde über F^* und f_k — werden wir dann, entsprechend obiger Argumentation bei der Behandlung von F^* (s. Formeln (7) bis (12)), auf eine Beziehung

$$\text{(18)} \qquad \tilde{F}^*(n,z) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=1}^{m} g_{lk}(z)\, Q(z)\, \tilde{f}_k(z)\, n^l$$

geführt. Man beachte, daß bei dieser Ableitung die Beziehungen (3) und (4) nicht involviert sind. Wegen $\tilde{F}^*(n,z) = F^*(n,z)$ (nach Definition von F^*) und weil sowohl $\tilde{F}^*$ als auch F^* Polynome in n vom Grade m sind, folgt

$$\text{(19)} \qquad \sum_{k=1}^{m} g_{lk}(z)\, Q(z) \left[f_k(z) - \tilde{f}_k(z) \right] = 0, \; 0 \le l \le m$$

In Matrizenform lautet dieses Gleichungssystem

$$\text{(20)} \qquad \mathbf{G} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Hierbei ist $\mathbf{G} = (g_{lk})$ eine obere Dreiecksmatrix und

$$\text{(21)} \qquad \mathbf{h} = \left(f_0(z) - \tilde{f}_0(z), \cdots, f_m(z) - \tilde{f}_m(z) \right)^t$$

ein transponierter Vektor. Aufgrund von

$$\text{(22)} \qquad \mathrm{Det}(\mathbf{G}) = g_{11}^{m}(z) = \left(\frac{1}{P(z)} \right)^m \neq 0 , \quad z \in D',$$

können wir daher $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ schließen. Folglich ist $\tilde{f}_k = f_k$, $0 \le k \le m$, evident.

Zu (ii) und (iii). Die Behauptung bezüglich des durch (3) und (4) beschriebenen Rücksubstitutionsverfahren folgt unter Beachtung von (11) und (13) aus dem Existenzbeweis der f_k .

Für $z \in D'$ gilt stets $P(z) \neq 0 \neq Q(z)$. Die g_{lk} (nach (13)) sind daher allesamt holomorph in D', so daß sich (ii) einfach nach sukzessiver Anwendung von (3) und (4) für $m \ge k \ge 0$ ergibt. &

Nun können wir das im Anschluß an Satz 3.2.3 aufgeworfene Existenzproblem bezüglich der Vermittlungstransformation 3.2.3 (1) positiv entscheiden.

3.2.8 SATZ

Sei $q_n = p_n d_n$ und (d_n) eine PE-Folge vom Grade m. Weiter seien P und Q nullstellenfrei auf $[0,1[$ sowie holomorph in einem Gebiet $D \supset [0,1[$. Die für irgendeine Folge (s_n) definierte Funktion

(1) $$\Phi_P[s_n](z) = \frac{1}{P(z)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n z^n$$

sei ebenfalls holomorph in D.

Dann gibt es ein weiteres Gebiet D', $D \supset D' \supset [0,1[$ und eindeutig bestimmte, auf D' holomorphe Funktionen f_k, $0 \le k \le m$, so daß

(2) $$\Psi[s_n](z) := \sum_{k=0}^{m} f_k(z) z^k \Phi_P^{(k)}[s_n](z)$$

holomorph ist in D', und mit

(3) $$\Phi_Q[s_n](z) := \frac{1}{Q(z)} \sum_{n=0}^{\infty} q_n s_n z^n$$

gilt $\Phi_Q[s_n](z) = \Psi[s_n](z)$ für alle $z \in D'$.

Beweis: Die Voraussetzungen von Lemma 3.2.7 sind erfüllt. Daher gibt es Funktionen f_k und ein Gebiet D', so daß

$$\frac{q_n z^n}{Q(z)} = \sum_{k=0}^{m} f_k(z) z^k \left(\frac{p_n z^n}{P(z)}\right)^{(k)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $z \in D'$. Aufgrund von Punkt (ii) des zitierten Lemmas sind die f_k, $0 \le k \le m$, und $\Psi[s_n]$ holomorph in D'. Wir dürfen $\Phi_P[s_n](z)$ für jedes $z \in D'$ gliedweise differenzieren und bekommen so

$$\Psi[s_n](z) = \sum_{k=0}^{m} f_k(z)\, z^k \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p_n s_n z^n}{P(z)}\right)^{(k)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_k(z)\, z^k \left(\frac{p_n s_n z^n}{P(z)}\right)^{(k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n s_n z^n}{Q(z)}$$

$$= \Phi_Q[s_n](z)$$

für alle $z \in D'$. &

Wir wenden uns nun der Größenordnungsbedingung 3.2.3 (2) zu. Entscheidend für die Behandlung des Problems ist der nächste Hilfssatz, den wir unter Anwendung des rein technischen Lemmas 2.2.7 verifizieren. Man beachte, daß an dieser Stelle die in Kapitel 2 auf der Grundlage des neu eingeführten Grenzwertbegriffs (vgl. Definition 1.2.4) entwickelte Theorie voll zum Tragen kommt.

3.2.9 LEMMA

Sei R eine nicht-entartete Randfunktion und $h \in HR(R)$ eine glatte und totale Randabstandsfunktion. Ferner sei $q_n = p_n d_n$ für alle $n \geq 0$ und (d_n) eine PE-Folge vom Grade $m \in \mathbb{N}$, also etwa

$$d_n = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k$$

mit geeigneten a_k, $0 \leq k \leq m$. P und Q seien für ein $\delta > 0$ nullstellenfrei und holomorph in einem Gebiet $D \supset [0,1[\cup S_\delta(R)$.

Die aufgrund dieser Voraussetzungen nach Lemma 3.2.7 existierenden Funktionen f_k, $0 \leq k \leq m$, genügen den folgenden Abschätzungen:

(i) $\quad \frac{P}{P'} = O_R(h) \quad \Longrightarrow \quad f_k = O_R\left(\frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-k}\right)$

(ii) $\quad \frac{P'}{P} = O_R(h^{-1}) \quad \Longrightarrow \quad f_k = O_R\left(\frac{P}{Q}\, h^{k-m}\right)$

Beweis: Nach Lemma 3.2.7 haben wir

(1) $$f_m(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\, a_m$$

und

(2) $$f_k(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\left[a_k - \sum_{l=k+1}^{m} Q(z)\, f_l(z)\, g_{kl}(z)\right]$$

wobei

(3) $$g_{kl}(z) := \sum_{j=0}^{l-k} \binom{l}{j}\left(\frac{1}{P(z)}\right)^{(j)} c_l^{(k-j)}\, z^j$$

Das durch (1) und (2) beschriebene Rücksubstitutionsverfahren ist nach Lemma 3.2.7 — dort hatten wir die relevante Menge mit D' bezeichnet — für alle $z \in D$ gültig, die Funktionen f_k sind daher insbesondere in geeigneten Stolz-Mengen $S_r(R)$, $r>0$, wohldefiniert.

Zu (i). Es ist

$$\frac{\left(1/P\right)'}{1/P} = -\frac{P'}{P} = O_R\left(\frac{P'}{P}\right)$$

sowie

$$\frac{P}{P'} = O_R(h)$$

Daher erhalten wir nach Anwendung von Lemma 2.2.7

(4) $$\left(\frac{1}{P}\right)^{(j)} = O_R\left(\frac{1}{P}\left(\frac{P'}{P}\right)^j\right)$$

für alle $j \in N$. Es folgt weiter

$$\text{(5)} \qquad g_{kl} = \sum_{j=0}^{l-k} O_R\left(\frac{1}{P}\left(\frac{P'}{P}\right)^j\right) c_k^{(l-j)}$$

$$= O_R\left(\frac{1}{P}\left(\frac{P'}{P}\right)^{l-k}\right)$$

Wegen

$$\left(\frac{P'}{P}\right)^j = \left(\frac{P'}{P}\right)^{l-k+(j-(l-k))}$$

$$= \left(\frac{P'}{P}\right)^{l-k} \left(\frac{P}{P'}\right)^{l-k-j}$$

$$= \left(\frac{P'}{P}\right)^{l-k} O_R(h^{l-k-j})$$

$$= \left(\frac{P'}{P}\right)^{l-k} o_R(1)$$

für $0 \le j < l-k$ und $c_k^{(l-(l-k))} = c_k^{(k)} = 1 \neq 0$ ist hierbei einzig der Summand mit $j = l-k$ ausschlaggebend.

Für $k=m$ haben wir wegen

$$\text{(6)} \qquad f_m = \frac{P}{Q} \cdot a_m = O_R\left(\frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-m}\right)$$

bereits die gewünschte Aussage. Seien also

$$\text{(7)} \qquad f_j = O_R\left(\frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-j}\right)$$

für $m \ge j > k \ge 0$ verifiziert. Dann können wir folgern

$$f_k = O_R\left(\frac{P}{Q}\right) + \sum_{l=k+1}^{m} P\, O_R\left(\frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-l}\right) O_R\left(\frac{1}{P}\left(\frac{P'}{P}\right)^{l-k}\right)$$

$$(8) \qquad = O_R\left(\frac{P}{Q}\right) + O_R\left(\frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-k}\right)$$

$$= O_R\left(\frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-k}\right)$$

Nach Wiederholung dieses Schlusses für $k = m-1, m-2, \cdots, 2, 1, 0$ ist somit der Beweis der Behauptung (i) erbracht. Der relevante Schritt bei der Vereinfachung der Beziehung (8) geht aufgrund von

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-k}\left(\frac{P}{P'}\right)^{m-k}$$

$$= \frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-k} O_R(h^{m-k})$$

$$= \frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^{m-k} o_R(1)$$

für alle $k<m$ gut.

Zu (ii). Wegen

$$\frac{P'}{P} = O_R(h^{-1})$$

ist nach Lemma 2.2.7 für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1}{P}\right)^{(j)} = O_R\left(\frac{1}{P} h^{-j}\right)$$

Wie oben folgt weiterhin

$$g_{kl}(z) = O_R\left(\frac{1}{P} h^{k-l}\right)$$

Ausgehend von

$$f_m(z) = O_R\left(\frac{P}{Q} h^{m-m}\right)$$

verifiziert man schließlich für $k = m-1,\ m-2,\ \cdots,\ 2,\ 1,\ 0$ sukzessive

$$f_k(z) = O_R\left(\frac{P}{Q} h^{k-m}\right) \qquad \&$$

3.2.10 BEMERKUNG

Für normierte Potenzreihenverfahren wird durch die vermittelnde PE-Folge ein direkter Bezug zwischen den relevanten Funktionen P und Q geschaffen. Sind etwa $[P;p_n;R]$ und $[Q;q_n;R]$ zwei normierte Potenzreihenverfahren und (d_n) mit $q_n = p_n d_n$ eine PE-Folge vom Grade $m \in \mathbb{N}$, dann gibt es wegen Bemerkung 3.2.6 geeignete Konstanten b_k, $0 \le k \le m$, so daß

$$d_n = \sum_{k=0}^{m} b_k\, n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Damit finden wir leicht

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, z^k P^{(k)}(z)$$

Diese Beziehung ist für nicht-normierte Potenzreihenverfahren natürlich nicht mehr richtig. Gemäß Definition 1.2.3 bekommen wir jetzt nur asymptotische Gleichheit, also

$$\frac{1}{Q(z)} \sum_{k=0}^{m} b_k\, z^k P^{(k)}(z) \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad z \longrightarrow 1,\ z \in S(R).$$

Wir formulieren und beweisen nun, als Gegenstück zum Momentenfolgen-Vergleichssatz, eine Aussage zum Stärkevergleich von Potenzreihenverfahren, die über eine PE-Folge zusammenhängen. Der in Rede stehende Satz

Ausgehend von

$$f_m(z) = O_R\left(\frac{P}{Q} h^{m-m}\right)$$

verifiziert man schließlich für $k = m-1, m-2, \cdots, 2, 1, 0$ sukzessive

$$f_k(z) = O_R\left(\frac{P}{Q} h^{k-m}\right) \qquad \&$$

3.2.10 BEMERKUNG

Für normierte Potenzreihenverfahren wird durch die vermittelnde PE-Folge ein direkter Bezug zwischen den relevanten Funktionen P und Q geschaffen. Sind etwa $[P;p_n;R]$ und $[Q;q_n;R]$ zwei normierte Potenzreihenverfahren und (d_n) mit $q_n = p_n d_n$ eine PE-Folge vom Grade $m \in \mathbb{N}$, dann gibt es wegen Bemerkung 3.2.6 geeignete Konstanten b_k, $0 \le k \le m$, so daß

$$d_n = \sum_{k=0}^{m} b_k\, n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Damit finden wir leicht

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k P^{(k)}(z)$$

Diese Beziehung ist für nicht-normierte Potenzreihenverfahren natürlich nicht mehr richtig. Gemäß Definition 1.2.3 bekommen wir jetzt nur asymptotische Gleichheit, also

$$\frac{1}{Q(z)} \sum_{k=0}^{m} b_k z^k P^{(k)}(z) \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad z \longrightarrow 1,\ z \in S(R).$$

Wir formulieren und beweisen nun, als Gegenstück zum Momentenfolgen-Vergleichssatz, eine Aussage zum Stärkevergleich von Potenzreihenverfahren, die über eine PE-Folge zusammenhängen. Der in Rede stehende Satz

$$f_k = O_R\left(\frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^m \cdot \left(\frac{P}{P'}\right)^k\right)$$

(1)
$$= O_R(1) \cdot O_R\left(\left(\frac{P}{P'}\right)^k\right)$$

$$= O_R(h^k)$$

Demnach haben wir auch die Bedingung 3.2.3 (2) verifiziert und wir dürfen Satz 3.2.3 anwenden: Sei also $[P;p_n;R]$-lim $s_n = 0$, dann ist $\Phi_P[s_n] = o_R(1)$ und nach 3.2.3 (ii) folgt $\Phi_Q[s_n] = o_R(1)$, mithin erhalten wir $[Q;q_n;R]$-lim $s_n = 0$. Bemerkung 1.2.5 liefert die Verträglichkeitsaussage.

Der Beweis zu (ii) läuft völlig analog. An die Stelle von (1) tritt jetzt

(2)
$$f_k(z) = O_R\left(\frac{P}{Q} h^{-m} \cdot h^k\right)$$

$$= O_R(h^k)$$

Der Rest folgt wie oben. &

Der PE-Vergleichssatz läßt sich in gewisser Weise als Komplement zum früher bewiesenen Momentenfolgen-Vergleichssatz (3.1.2) auffassen. Dies hat weitreichende Folgen im Hinblick auf Vergleichsaussagen zwischen Potenzreihenverfahren mit nicht-verschwindenden Randfunktionen. Das fruchtbare Zusammenwirken der beiden Sätze gipfelt in einigen interessanten Fällen in prägnanten Äquivalenzaussagen (s. Abschnitt 3.3 und Kapitel 4, insbesondere Satz 4.1.5).

3.3 Zwei Äquivalenztheoreme

Auf Grundlage der beiden zentralen Vergleichsaussagen 3.1.2 und 3.2.11 können wir nun einen allgemeinen Äquivalenzsatz für Potenzreihenverfahren mit nicht-verschwindenden Randfunktionen formulieren. Im Prinzip handelt es sich hierbei lediglich um eine geschickte Zusammenfassung jener Sätze.

Der Leitgedanke war, durch geeignete Darstellung der relevanten Quotienten q_n/p_n — im Sinne der zitierten Sätze — als Produkt einer polynom-erzeugten Folge ψ_n und einer Momentenfolge μ_n , die sukzessive Anwendung beider Sätze zu ermöglichen. In diesem Kontext ist die Erkenntnis wichtig, daß die Faktorenzerlegung des reziproken Quotienten p_n/q_n — etwa als Produkt $\overline{\psi}_n\overline{\mu}_n$ — unabhängig von der speziellen Zerlegung $\psi_n\mu_n$ gewählt werden darf.

3.3.1 SATZ

Seien $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei normierte Potenzreihenverfahren mit nicht-entarteter Randfunktion* R *sowie* $h\in HR(R)$ *eine glatte und totale Randabstandsfunktion.*

Es gebe polynom-erzeugte Folgen (ψ_n) *[vom Grade* m*],* $(\overline{\psi}_n)$ *[vom Grade* $\overline{m}$*] und Momentenfolgen* (μ_n), $(\overline{\mu}_n)$, *so daß*

$$q_n = \psi_n \mu_n p_n \ , \qquad n\in\mathbb{N}$$

sowie

$$\psi_n \overline{\psi}_n \mu_n \overline{\mu}_n = 1 \ , \qquad n\in\mathbb{N}$$

Weiter seien, mit geeigneten χ, $\overline{\chi}\in BV([0,1])$

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \, d\chi(t), \qquad \int_0^1 |d\chi(t)| < \infty$$

$$\overline{\mu}_n = \int_0^1 t^n \, d\overline{\chi}(t), \qquad \int_0^1 |d\overline{\chi}(t)| < \infty$$

Die beiden Funktionen

(1) $$\overline{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n p_n z^n \quad \textit{und} \quad \overline{Q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\psi}_n q_n z^n$$

sind dann wohldefiniert und in einem Gebiet $D \supset [0,1[\cup S_\delta(R)$, $\delta>0$, *holomorph.*

Es gelte speziell $\overline{P}(z) \neq 0 \neq \overline{Q}(z)$ *für alle* $z \in [0,1[$.

Wenn nun die Bedingungen

(i) $$\frac{P}{P'} = O_R(h), \qquad \frac{P}{\overline{P}}\left(\frac{P'}{P}\right)^m = O_R(1)$$

(ii) $$\frac{Q}{Q'} = O_R(h), \qquad \frac{Q}{\overline{Q}}\left(\frac{Q'}{Q}\right)^{\overline{m}} = O_R(1)$$

(iii) $$\int_0^1 |\overline{P}(tz)|\,|d\chi(t)| = O(|Q(z)|) \qquad \textit{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

(iv) $$\int_0^1 |\overline{Q}(tz)|\,|d\overline{\chi}(t)| = O(|P(z)|) \qquad \textit{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

erfüllt sind, dann gilt

$$[P;p_n;R] \approx [Q;q_n;R]$$

das heißt, die beiden Potenzreihenverfahren sind gleichstark (mit Verträglichkeit).

Beweis: Wir zerlegen den Beweisgang in mehrere Teilschritte.

(a) $[P;p_n;R] \subset [\overline{P};\psi_n p_n;R]$

(b) $[\overline{P};\psi_n p_n;R] \subset [Q;q_n;R]$

(c) $[Q;q_n;R] \quad \subset \quad [\overline{Q};\overline{\psi}_n q_n;R]$

(d) $[\overline{Q};\overline{\psi}_n q_n;R] \subset \quad [P;p_n;R]$

Mit dem Nachweis dieser Inklusionen ist offensichtlich auch die Aussage des Satzes verifiziert. Wir schicken voraus, daß hier, wie die Bezeichnungen in (a) bis (d) suggerieren, tatsächlich Potenzreihenverfahren miteinander verglichen werden. Insofern müssen wir allerdings noch zeigen, daß durch die beiden Tripel $[\overline{P};\psi_n p_n;R]$ und $[\overline{Q};\overline{\psi}_n q_n;R]$ Potenzreihenverfahren im Sinne von Definition 1.2.3 bestimmt werden.

Aufgrund von Bemerkung 3.2.6 gibt es geeignete Konstanten b_k, $0 \le k \le m$, mit

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{m} b_k \, n(n-1) \cdots (n-k+1) \tag{2}$$

Die Potenzreihendarstellung für P konvergiert in einer ausreichend kleinen ε-Umgebung U des Nullpunktes. Da (ψ_n) eine PE-Folge ist, konvergiert die unter (1) aufgeschriebene Potenzreihe für $\overline{P}$ ebenfalls in U. Zusammen mit (2) dürfen wir also auf

$$\overline{P}(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, z^k \, P^{(k)}(z) \tag{3}$$

für alle $z \in U$ schließen. Per definitionem gibt es nun aber ein $\delta' > 0$ und ein Gebiet $D' \supset [0,1[\, \cup \, S_{\delta'}(R)$ in welchem P holomorph ist. In diesem Gebiet ist die rechte Seite von (3) holomorph, der Identitätssatz für holomorphe Funktionen liefert uns daher die holomorphe Fortsetzung von $\overline{P}$ in das volle Gebiet D' hinein. Weiter folgt mit (i)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{P}} &= O_R\left(\frac{1}{P} \left(\frac{P}{P'} \right)^m \right) \\
&= O_R(h^m / P) \\
&= o_R(1)
\end{aligned}$$

Wegen $\overline{P}(z)\neq 0$ für alle $z\in[0,1[$, haben wir also bezüglich $[\overline{P};\psi_n p_n;R]$ alle geforderten Eigenschaften eines Potenzreihenverfahrens belegt.

Wir wenden uns nun dem Tripel $[\overline{Q};\overline{\psi}_n q_n;R]$ zu. Die entsprechenden Aussagen können hier völlig analog bewiesen werden. Die Behauptung zur Existenz eines beiden Funktionen $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ gemeinsamen, eine Stolz-Menge umschließenden Holomorphiegebietes D bedürfen keiner Präzisierung.

Zum Beweis von (a) bis (d) dürfen wir nun offensichtlich die Sätze 3.1.2 und 3.2.11 heranziehen:

Die Gültigkeit von (a) ist wegen Satz 3.2.11 evident. (b) wird durch Satz 3.1.2 in Verbindung mit der Voraussetzung (iii) belegt. Zum Beweis von (c) genügt der Hinweis auf Satz 3.2.11 und Bedingung (ii). Schließlich erweist sich die Richtigkeit von (d) nach erneuter Anwendung von Satz 3.1.2 unter Berücksichtigung von (iv). &

Zur Konkretisierung dieser Äquivalenzaussage werden wir jetzt für eine große Klasse von Potenzreihenverfahren die Äquivalenz zum Abel-Verfahren $A_0(R)$ nachweisen. Dabei müssen wir uns wieder auf Stolz'sche Randfunktionen beschränken. Zum Beweis benötigen wir noch einen Hilfssatz.

3.3.2 LEMMA

Sei R eine Stolz'sche Randfunktion. Wir setzen

$$p_n := \prod_{i=1}^{m_\alpha} (n+a_i)^{\alpha_i} \Big/ \prod_{j=1}^{m_\beta} (n+b_j)^{\beta_j}$$

und

$$\gamma := \sum_{i=1}^{m_\alpha} \alpha_i - \sum_{j=1}^{m_\beta} \beta_j$$

wobei $a_i, \alpha_i, b_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $a_i, \alpha_i, b_j, \beta_j > 0$ *für* $1\le i\le m_\alpha$, $1\le j\le m_\beta$ *und* $\gamma>-1$.
Ferner definieren wir die Funktion

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

als Potenzreihe der Folge (p_n).

Es gelten nun die folgenden Aussagen

(i) $p_n > 0$ *für alle* $n \geq 0$

(ii) $n^{-\gamma} p_n = 1 + o(1)$ *für* $n \longrightarrow \infty$

(iii) $(1-z)^{\gamma+1} P(z) = \Gamma(\gamma+1) + o(1)$ *für* $z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$

(iv) $(1-z)\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \gamma+1+o(1)$ *für* $z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$(1) \qquad \begin{aligned} p_n &= \prod_{i=1}^{m_\alpha} n^{\alpha_i} \left(1+\frac{a_i}{n}\right)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{m_\beta} n^{-\beta_j} \left(1+\frac{b_j}{n}\right)^{-\beta_j} \\ &= n^{\gamma} \prod_{i=1}^{m_\alpha} \left(1+\frac{a_i}{n}\right)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{m_\beta} \left(1+\frac{b_j}{n}\right)^{-\beta_j} \end{aligned}$$

(i) läßt sich hieraus unmittelbar ablesen.

Für

$$n \geq \max\left(a_i \,|\, 1 \leq i \leq m_\alpha\right) \quad \text{und} \quad n \geq \max\left(b_j \,|\, 1 \leq j \leq m_\beta\right)$$

ist jeder einzelne geklammerte Faktor von (1) in eine – offensichtlich absolut konvergente – Reihe entwickelbar. In dieser Form können wir die unter (1) aufgeschriebenen Produkte problemlos ausmultiplizieren und werden so auf die folgende Reihendarstellung der p_n geführt:

$$(2) \qquad p_n = n^{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k n^{-k}$$

Für ausreichend große n ist diese Reihe als Produkt absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Die Koeffizienten c_k sind entsprechend der beschriebenen Vorgehensweise prinzipiell aus den a_i und b_j berechenbar, insbesondere gilt $c_0=1$. Also haben wir

$$p_n = n^{\gamma}(1+o(1)) \quad \text{für } n \longrightarrow \infty \tag{3}$$

Demnach ist (ii) evident. Wegen

$$n^{-\gamma}\binom{n+\gamma}{n} \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \quad \text{für } n \longrightarrow \infty$$

erhalten wir ferner

$$p_n = \Gamma(\gamma+1)\binom{n+\gamma}{n} + \varepsilon_n\binom{n+\gamma}{n} \tag{4}$$

mit einer Nullfolge (ε_n). Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n &= \Gamma(\gamma+1)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\gamma}{n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\binom{n+\gamma}{n} z^n \\ &= \Gamma(\gamma+1)(1-z)^{-\gamma-1} + r(z) \end{aligned} \tag{5}$$

wobei

$$\begin{aligned} |r(z)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\binom{n+\gamma}{n} z^n\right| \\ &\le \left|\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_n\binom{n+\gamma}{n} z^n\right| + \sup_{n>N}|\varepsilon_n| \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\gamma}{n}|z|^n \end{aligned}$$

Weiter bekommen wir

$$|1-z|^{\gamma+1}|r(z)| \le |1-z|^{\gamma+1}\sum_{n=0}^{N}\binom{n+\gamma}{n}|\varepsilon_n| + \sup_{n>N}|\varepsilon_n| \cdot \left(\frac{|1-z|}{1-|z|}\right)^{\gamma+1}$$

Nach Lemma 3.1.4 ist der geklammerte Term des letzten Summanden dieser Abschätzung beim Grenzübergang $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$ beschränkt, d.h., es gibt ein $\delta'>0$ und ein $K>0$, so daß

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < K \quad \text{für alle } z \in S_{\delta'}(R)$$

Ist nun ein $\varepsilon>0$ vorgegeben, so wählen wir zunächst ein N derart, daß

$$K^{\gamma+1} \sup_{n>N} |\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und dann — was offensichtlich möglich ist — ein $\delta>0$ aber $\delta<\delta'$ mit

$$|1-z|^{\gamma+1} \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\gamma}{n} |\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } z \in S_\delta(R)$$

Wir haben also

(6) $$\left|(1-z)^{\gamma+1} P(z) - \Gamma(\gamma+1)\right| = |r(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in S_\delta(R)$$

Das ist die Behauptung (iii).

Zum Nachweis von (iv) setzen wir

$$\bar{p}_n := (n+1)\, p_{n+1} \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

und

$$\bar{P}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n z^n$$

Wenn wir nun die obigen Schlußweisen sinngemäß auf $\bar{p}_n$ anwenden, so finden wir leicht $\bar{p}_n = O(n^{\gamma+1})$. Insbesondere gilt

$$(1-z)^{\gamma+2} P(z) = \Gamma(\gamma+2) + o(1) \quad \text{für} \quad z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

Aufgrund von

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n z^{n-1} \equiv \bar{P}(z)$$

folgt weiter

$$\frac{(1-z)^{\gamma+2}P'(z)}{(1-z)^{\gamma+1}P(z)} = \frac{\Gamma(\gamma+2)+o(1)}{\Gamma(\gamma+1)+o(1)} = \gamma+1+o(1)$$

für $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$, womit auch (iv) bewiesen ist. &

Wir kommen nun zu dem angekündigten konkreten Äquivalenzsatz.

3.3.3 SATZ

Sei R eine Stolz'sche Randfunktion und ferner

$$q_n := \prod_{i=1}^{m_\alpha}(n+a_i)^{\alpha_i} \Big/ \prod_{j=1}^{m_\beta}(n+b_j)^{\beta_j}$$

$$\gamma := \sum_{i=1}^{m_\alpha}\alpha_i - \sum_{j=1}^{m_\beta}\beta_j > -1$$

wobei $a_i, \alpha_i, b_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $a_i, \alpha_i, b_j, \beta_j > 0$ *für* $1 \le i \le m_\alpha$, $1 \le j \le m_\beta$.
Wenn wir nun

$$Q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

setzen, so ist $[Q;q_n;R]$ *ein Potenzreihenverfahren und es gilt*

$$A_0(R) \approx [Q;q_n;R]$$

Beweis: Wir führen den Beweis unter Rückgriff auf Satz 3.3.1 und entscheidender Verwendung des oben notierten Lemmas 3.3.2. Zunächst folgt aus dem genannten Hilfssatz, daß $[Q;q_n;R]$ tatsächlich ein Potenzreihenverfahren ist.

Weiter definieren wir $p_n := 1$ für alle $n \ge 0$ sowie

$$\psi_n := \prod_{i=1}^{m_\alpha}(n+a_i)^{1+[\alpha_i]}\,, \qquad \mu_n := \prod_{i=1}^{m_\alpha+m_\beta}\mu_n^{(i)}$$

wobei

$$\mu_n^{(i)} := \begin{cases} (n+a_i)^{\alpha_i - [\alpha_i] - 1} & \text{für } 1 \le i \le m_\alpha \\ (n+b_i)^{-\beta_i} & \text{für } m_\alpha < i \le m_\alpha + m_\beta \end{cases}$$

und vereinbaren

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

$$\overline{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n p_n z^n$$

Demnach haben wir $[P;p_n;R] = A_0(R)$. Man sieht unmittelbar ein, daß $\overline{P}$ auf $[0,1[$ nullstellenfrei ist.

Nun ist (ψ_n) offensichtlich eine polynom-erzeugte Folge mit $1 \neq 0$ als Koeffizient der höchsten Potenz. Des weiteren sind die $(\mu_n^{(i)})$ Momentenfolgen, denn es gilt

$$(1) \qquad \int_0^1 t^n \frac{t^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(-\log t\right)^{\alpha-1} dt = (n+a)^{-\alpha}$$

für alle $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, \alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ (man beachte, $\beta_i > 0$ und $-\alpha_i + [\alpha_i] + 1 > 0$). Also ist auch (μ_n) eine Momentenfolge. Daher existiert ein $\chi \in BV([0,1])$, so daß

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \, d\chi(t)$$

Insbesondere folgen

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \, |d\chi(t)| \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 |d\chi(t)| < \infty$$

aus der ersichtlich bestehenden entsprechenden Eigenschaft des oben aufgeschriebenen Integrals (1).
Wir fahren fort mit der Definition der zu $\psi_n \mu_n$ reziproken Hilfsfolgen.

$$\overline{\psi}_n := \prod_{j=1}^{m_\beta} (n+b_j)^{1+[\beta_j]}$$

$$\overline{\mu}_n := \prod_{i=1}^{m_\alpha+m_\beta} \overline{\mu}_n^{(i)}$$

$$\overline{\mu}_n^{(i)} := \begin{cases} (n+a_i)^{-\alpha_i} & \text{für } 1 \le i \le m_\alpha \\ (n+b_i)^{\beta_i-[\beta_i]-1} & \text{für } m_\alpha < i \le m_\alpha+m_\beta \end{cases}$$

$$\overline{Q}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\psi}_n q_n z^n$$

$\overline{Q}$ hat auf dem reellen Intervall $[0,1[$ mit Sicherheit keine Nullstellen. Auf $(\overline{\psi}_n)$ und $(\overline{\mu}_n)$ lassen sich die weiter oben für (ψ_n) und (μ_n) durchgeführten Schlüsse problemlos übertragen. Demnach existiert auch hier ein $\overline{\chi} \in BV([0,1])$ mit

$$\overline{\mu}_n = \int_0^1 t^n \, d\overline{\chi}(t) = \int_0^1 t^n \, |d\overline{\chi}(t)| \quad \text{und} \quad \int_0^1 |d\overline{\chi}(t)| < \infty$$

Wie man leicht verifiziert, haben wir nun für alle $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \psi_n \mu_n p_n \qquad \text{und} \qquad \psi_n \mu_n \overline{\psi}_n \overline{\mu}_n = 1$$

Zur Anwendung von Satz 3.3.1 bedarf es daher nur noch des Nachweises der dort aufgeführten Bedingungen (i) bis (iv). Wir wenden zuerst Lemma 3.3.2 auf (q_n) bzw. Q an und bekommen

$$0 < q_n = O(n^\gamma) \quad \text{für } n \longrightarrow \infty ,$$

$$\frac{1}{Q(z)} = O(\,(1-z)^{\gamma+1}) \quad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

sowie

$$\frac{Q'(z)}{Q(z)} = \frac{\gamma + 1 + o(1)}{1 - z} \quad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

Die ersten beiden Bedingungen in Verbindung mit Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5 belegen 3.3.1 (iii) unmittelbar (man beachte $q_n = \mu_n \cdot \phi_n p_n = \mu_n \psi_n$ mit $\psi_n \geq 0$).

Wegen der absoluten Konvergenz der fraglichen Reihe für $|z|<1$, dürfen wir im folgenden Integration und Summation vertauschen.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\overline{Q}(zt)|\,|d\overline{\chi}(t)| &\leq \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\psi}_n q_n |z^n|\, t^n\, |d\overline{\chi}(t)| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\mu}_n \overline{\psi}_n q_n |z^n| \\
&= P(|z|) \\
&= O(|P(z)|) \qquad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt wird durch Lemma 3.1.4 belegt.
Damit ist die Gültigkeit von 3.3.1 (iv) nachgewiesen.

Lemma 3.3.2 angewandt auf (ϕ_n) und $(\overline{\psi}_n q_n)$ ergibt mit

$$\bar{\alpha} := \sum_{i=1}^{m_\alpha} (1+[\alpha_i]) \quad \text{und} \quad \bar{\beta} := \sum_{j=1}^{m_\beta} (1+[\beta_j])$$

sofort

$$(1-z)^{\bar{\alpha}+1}\,\overline{P}(z) = \Gamma(\bar{\alpha}+1) + o(1) \qquad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

und

$$(1-z)^{\gamma+\bar{\beta}+1}\,\overline{Q}(z) = \Gamma(\gamma+\bar{\beta}+1) + o(1) \qquad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

Hieraus erhalten wir wegen

$$\frac{P(z)}{P'(z)} = 1-z \qquad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

und

$$\frac{Q(z)}{Q'(z)} = (1-z)\left(\frac{1}{\gamma+1} + o(1)\right) \quad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R),$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $h(z) := 1-z$ bezüglich jeder Stolz'schen Randfunktion eine geeignete Randabstandsfunktion im Sinne von Satz 3.3.1 ist, die beiden noch fehlenden Bedingungen 3.3.1 (i)

$$\frac{P(z)}{\overline{P}(z)}\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)^{\bar\alpha} = \frac{(1-z)^{\bar\alpha}}{\Gamma(\bar\alpha+1) + o(1)} \cdot (1-z)^{-\bar\alpha}$$

$$= O_R(1)$$

und 3.3.1 (ii)

$$\frac{Q(z)}{\overline{Q}(z)}\left(\frac{Q'(z)}{Q(z)}\right)^{\bar\beta} = \frac{(1-z)^{\gamma+\bar\beta}}{(1-z)^{\gamma}} \frac{\Gamma(\gamma+1) + o(1)}{\Gamma(\gamma+\bar\beta+1) + o(1)} (1-z)^{-\bar\beta}\left((\gamma+1)^{\bar\beta} + o(1)\right)$$

$$= O_R(1)$$

Der Beweis ist nunmehr vollständig erbracht. &

3.4 Notwendige und hinreichende Bedingungen für PE-Vergleichssätze

Wir untersuchen im folgenden Varianten des PE-Vergleichssatzes 3.2.11 im Hinblick auf eine Modifizierung der Anwendbarkeitsbedingungen (i) und (ii). In diesem Zusammenhang gelangen wir für eine große Klasse von Potenzreihenverfahren zu notwendigen Bedingungen.

Wir beginnen mit einer Definition.

3.4.1 DEFINITION

Sei R eine Randfunktion. Ferner sei m irgendeine natürliche Zahl. Mit Hilfe der Bedingungen

(i) $\exists \delta>0$: *P ist holomorph in* $S_\delta(R) \cup [0,1[$

(ii) *Es gibt eine auf* $S_\delta(R)$ *holomorphe Funktion* T *mit* $T=o_R(1)$ *und ein* $c \neq 0$, *so daß*

$$\frac{P^{(k)}}{P} = T^{-k}\left(c^k + o_R(1)\right), \quad 0 \le k \le m$$

(iii) *Es gibt eine auf* $S_\delta(R)$ *holomorphe Funktion* T *mit* $T=o_R(1)$ *und ein* $c \neq 0$, *so daß*

$$\frac{P^{(k)}}{P} = T^{-k}\left(c^{\uparrow k} + o_R(1)\right), \quad 0 \le k \le m$$ [1]

(iv) *Es gibt zwei auf* $S_\delta(R)$ *holomorphe Funktionen* T *und* S, $T=o_R(S)$, $S=o_R(1)$ *und Konstanten* $c_k \neq 0$, $1 \le k \le m$, *mit*

$$\frac{P^{(k)}}{P} = T^{-k} S\left(c_k + o_R(1)\right), \quad 1 \le k \le m$$

definieren wir drei Familien von Funktionen.

(a) $P \in F_1^m \;:\Longleftrightarrow\;$ *P erfüllt (i) und (ii)*

(b) $P \in F_2^m \;:\Longleftrightarrow\;$ *P erfüllt (i) und (iii)*

(c) $P \in F_3^m \;:\Longleftrightarrow\;$ *P erfüllt (i) und (iv)*

3.4.2 BEMERKUNG und DEFINITION

Für ein Potenzreihenverfahren $[P;p_n;R]$ schreiben wir statt $P \in F_\nu^m$ auch $[P;p_n;R] \in F_\nu^m$ $(\nu=1,2,3)$.
Per definitionem gibt es zu jedem $P \in F_1^m$ eine Funktion T und ein $c \neq 0$, so daß 3.4.1 (ii) erfüllt ist. Daher macht die kompakte Notation $P \in F_1^m(T,c)$ durchaus Sinn. Es sei jedoch noch hervorgehoben, wir meinen damit zweierlei: 1. $P \in F_1^m$ und 2. die Bedingung 3.4.1 (ii) wird durch das Tripel (P,T,c) erfüllt.
Völlig analog sind die Schreibweisen $P \in F_2^m(T,c)$ bzw. $P \in F_3^m(T,S,(c_k))$ zu verstehen.
Wenn sich aus dem Zusammenhang unmittelbar die Größe des relevanten Parameters m ergibt, so schreiben wir anstelle von $P \in F_\nu^m$ kürzer

1 $c^{\uparrow k} = c(c+1)(c+2)\ldots(c+k-1)$; s. Symbolverzeichnis. Um Verwechslungen mit den öfters auftretenden Folgen (c_k) zu vermeiden, geben wir dieser Schreibweise gegenüber der üblichen Notation $(c)_k$ den Vorzug.

$P \in F_\nu$ $(\nu = 1,2,3)$.
Gilt $P \in F_\nu^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, dann notieren wir $P \in F_\nu^\infty$ $(\nu = 1,2,3)$.
Um die Notation nicht zu überladen, wurde die zugrundeliegende Randfunktion nicht mit aufgenommen. Klar ist jedoch, daß die gefaßten Bezeichnungen immer in Verbindung mit einer geeigneten Randfunktion zu lesen sind.

Typische Vertreter aus den einzelnen Familien sind

$$F_\delta(R) \in F_1^\infty\left((1-z)^{\delta+1}, i\delta\right), \ \delta>0$$

$$(1-z)^\sigma \exp\left((1-z)^{-\delta}\right) \in F_1^\infty\left((1-z)^{\delta+1}, i\delta\right), \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \delta>0$$

$$A_\alpha(R) \in F_2^\infty(1-z, \alpha+1), \ \alpha>-1$$

$$-\frac{\log(1-z)}{z(1-z)} \in F_2^\infty(1-z, 1)$$

$$-z^{-1} \log(1-z) \in F_3^\infty\left(1-z, -1/\log(1-z), ((k-1)!)_{k\geq 1}\right)$$

$$\left(z^{-1} \log(1-z)\right)^2 \in F_3^\infty\left(1-z, -1/\log(1-z), (2(k-1)!)_{k\geq 1}\right)$$

Diese Aussagen weist man im Einzelfall stets sehr einfach mit Hilfe der weiter unten bewiesenen Hilfssätze 3.4.5 und 3.4.11 bzw. durch direktes Berechnen der Ableitungen für $n \in \mathbb{N}$ nach (s. a. Abschnitte 4.1 und 4.2).

Der folgende Hilfssatz enthält bereits alle wesentlichen Mittel zum Beweis von Aussagen über den Vergleich von Potenzreihenverfahren aus der Familie F_3.

3.4.3 LEMMA

(1) $$\frac{P^{(k)}}{P} = T^{-k} S(c_k + o_R(1)), \quad 1 \le k \le m$$

mit zwei im Holomorphiegebiet von P holomorphen Funktionen

(2) $$T = o_R(S)$$

(3) $$S = o_R(1)$$

und Konstanten $c_k \neq 0$ *für* $1 \le k \le m$.

Für die nach Lemma 3.2.7 existierenden Funktionen f_k, $0 \le k \le m$, *gilt dann*

(4) $$f_k = T^k \left(\frac{c_{m-k}}{c_m} + o_R(1) \right), \quad 0 \le k < m$$

(5) $$f_m = \frac{T^m}{S} \left(\frac{1}{c_m} + o_R(1) \right)$$

Beweis: Nach Bemerkung 3.2.10 gibt es b_k, $0 \le k \le m$, so daß

(6) $$Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k P^{(k)}(z) \, (1 + o_R(1))$$

mit $b_m \neq 0$. Demnach ist

(7) $$\frac{Q}{P} = b_o + \sum_{k=1}^{m} b_k T^{-k} S(c_k + o_R(1))$$

$$= b_m T^{-m} S(c_m + o_R(1))$$

Im weiteren zeigen wir

(8) $$P\left(\frac{1}{P}\right)^{(j)} = -T^{-j} S(c_j + o_R(1)), \quad 1 \le j \le m$$

durch vollständige Induktion. Für m=1 verifiziert man die Formel unmittelbar Sei also (8) richtig für $1 \le j \le n < m$. Dann ist

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{P}\right)^{(n+1)} &= P\left(\left(\frac{1}{P}\right)'\right)^{(n)} \\ &= -P\left(\frac{P'}{P}\cdot\frac{1}{P}\right)^{(n)} \qquad (9) \\ &= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{P'}{P}\right)^{(k)} P\left(\frac{1}{P}\right)^{(n-k)} \end{aligned}$$

und somit wegen

$$\begin{aligned} \left(\frac{P'}{P}\right)^{(k)} &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{P^{(j+1)}}{P}\, P\left(\frac{1}{P}\right)^{(k-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} T^{-j-1} S\, T^{j-k} S\,(-c_{j+1}c_{k-j}+o_R(1)) \\ &\qquad + T^{-k-1} S\,(c_{k+1}+o_R(1)) \\ &= T^{-k-1} S\,(c_{k+1}+o_R(1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{P}\right)^{(n+1)} &= -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} T^{-k-1} S\, T^{k-n} S\,(-c_{k+1}c_{n-k}+o_R(1)) \\ &\qquad -T^{-n-1} S\,(c_{n+1}+o_R(1)) \qquad (10) \\ &= -T^{-n-1} S\,(c_{n+1}+o_R(1)) \end{aligned}$$

Daher ist (8) für $1 \le j \le m$ verifiziert. Nun wählen wir nach 3.2.7, mit

$$\sum_{k=0}^{m} a_k n^k := d_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

die Funktionen f_k, $0 \le k \le m$ derart, daß

(12) $$f_m = \frac{P}{Q} a_m$$

sowie

(13) $$f_k = \frac{P}{Q} a_k - \sum_{l=k+1}^{m} P\, g_{kl}\, f_l \quad , \; 0 \le k < m,$$

wobei

(14) $$g_{kl}(z) := \sum_{j=0}^{l-k} \binom{l}{j} \left(\frac{1}{P}\right)^{(j)} c_k^{(l-j)} z^j$$

Demnach ist (Man beachte $b_m = a_m$ nach Wahl der a_k und b_k)

(15) $$f_m = T^m S^{-1} (c_m^{-1} + o_R(1))$$

aufgrund von (7) und

(16) $$\begin{aligned} g_{kl}(z) &= \frac{1}{P} c_k^{(l)} - \sum_{j=1}^{l-k} \binom{l}{j} T^{-j} \frac{S}{P} (c_j + o_R(1))\, c_k^{(l-j)} \\ &= -\binom{l}{k} T^{-(l-k)} \frac{S}{P} (c_{l-k} + o_R(1)) \end{aligned}$$

folgt sukzessive für $k = m-1, m-2, \cdots, 2, 1, 0$

(17) $$f_k = T^k \left[\binom{m}{k} \frac{c_{m-k}}{c_m} + o_R(1) \right]$$

Zum Nachweis dieser Beziehung gehen wir von (15) aus und folgern mit (13)

$$\begin{aligned} f_k = {} & T^m S^{-1} (c_m^{-1} + o_R(1))\, a_k + \binom{m}{k} T^{k-m} S\, T^m S^{-1} \left(\frac{c_{m-k}}{c_m} + o_R(1) \right) \\ & + \sum_{l=k+1}^{m-1} \binom{l}{k} T^{k-l} S\, T^l \left[\binom{m}{l} \frac{c_{m-l}\, c_{l-k}}{c_m} + o_R(1) \right] \end{aligned}$$

$$= T^k \left[\binom{m}{k} \frac{c_{m-k}}{c_m} + o_R(1) \right]$$

Damit ist alles gezeigt. &

Unter entscheidender Nutzung von Lemma 3.4.3 beweisen wir nun eine erste Verschärfung des PE-Vergleichssatzes 3.2.11. Zwei weitere der hierzu benötigten Hilfssätze verifizieren wir, um den Blick auf das wesentliche nicht allzusehr durch technische Details zu verstellen, erst später (s. Lemmata 3.4.5 und 3.4.11).

3.4.4 SATZ

Seien $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei Potenzreihenverfahren, h eine glatte und totale Randabstandsfunktion aus HR(R) und* (d_n) *eine PE-Folge vom Grade* $m \geq 1$ *mit* $q_n = p_n d_n$ *für alle* $n \geq 0$.
Ferner sei $P \in F_3^m(T,S,(c_k))$.

(i) *Die Bedingung*

(*) $\quad T^m = O_R(S \cdot h^m)$

ist hinreichend für die Gültigkeit von $[P] \subset [Q]$.

(ii) *Wenn* $T(z) \equiv 1-z$, $p_n \neq 0$ *für alle* $n \geq 0$ *und*

(**) $\quad S \cdot P = O_R(1)$,

dann gilt $[P;R] \not\subset [Q;0]$.

(iii) *Wenn* $T(z) \equiv (1-z)^\gamma$ *mit einem* $\gamma \geq 1$, $p_n \neq 0$ *für alle* $n \geq 0$ *und*

(***) $\quad \exists \alpha > \gamma$: $R(x) = O(x^\alpha)$ *für* $x \longrightarrow 0+$,

dann gilt $[P;R] \not\subset [Q;0]$.

Beweis: Nach Lemma 3.4.3 gibt es Konstanten $A_k \neq 0$, $0 \leq k \leq m$, so daß

(1) $\qquad f_k = A_k T^k (1+o_R(1)), \qquad 0 \le k \le m,$

und

(2) $\qquad f_m = A_m T^m S^{-1} (1+o_R(1))$

Nach Voraussetzung haben wir ferner

(3) $\qquad f_m = O_R(h^m)$

und außerdem, wegen $S = o_R(1)$,

(4) $\qquad f_k = o_R(h^k), \qquad 1 \le k \le m$

Sei also (s_n) eine Folge mit $[P;p_n;R]$-lim $s_n = 0$, dann ist $\Phi_P[s_n] = o_R(1)$. Nach 3.2.8 (2) ergibt sich – in Verbindung mit 3.2.3 (ii) – sofort $\Phi_Q[s_n] = o_R(1)$, mithin $[Q;q_n;R]$-lim $s_n = 0$.
Das ist der Beweis zu (i).

Zum Nachweis der Behauptung (ii) zeigen wir, es gibt eine $[P;p_n;R]$-limitierbare Folge, die von $[Q;q_n;0]$ nicht limitiert wird.

Wir definieren hierzu eine Folge (s_n) über die Identität

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n z^n := (1-z)^i, \quad \left(i = \sqrt{-1} \right).$$

Als Definitionsgebiet der rechts stehenden Funktion nehmen wir die längs $[1,\infty[$ geschlitzte unendliche komplexe Ebene. Aufgrund der Zusatzvoraussetzungen an die p_n, ist die Folge wohldefiniert. Sodann erhalten wir mit $\Phi(z) := \Phi_P[s_n](z) = (1-z)^i / P(z)$

$$\begin{aligned} P \cdot \Phi^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[(1-z)^i \right]^{(k)} P \left(\frac{1}{P} \right)^{(n-k)} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k (i)^{\downarrow k} (1-z)^{i-k} (1-z)^{k-n} S (c_{n-k} + o_R(1)) \\ &\qquad + (-1)^n (i)^{\downarrow n} (1-z)^{i-n} \end{aligned}$$

$$= (-1)^n (i)^{\downarrow n} (1-z)^{i-n} \; (1+o_R(1))$$

Hierbei haben wir Formel (8) aus dem Beweis zu Lemma 3.4.3 und $S = o_R(1)$ berücksichtigt. Es folgt weiter mit $D_k := (-1)^k (i)^{\downarrow k}$, $0 \le k \le m$,

$$\frac{\Phi^{(k)}}{\Phi} = D_k \, (1-z)^{-k} (1+o_R(1)) \, , \qquad 0 \le k \le m \, .$$

Nach Satz 3.2.8 sowie (1) und (2) gilt

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \Phi_Q[s_n](z) &= \sum_{k=0}^{m-1} A_k \, (1-z)^k \, \Phi^{(k)} \cdot (1+o_R(1)) \\ &\qquad + A_m (1-z)^m \, S^{-1} \, \Phi^{(m)} \cdot (1+o_R(1)) \\ &= \Phi \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} A_k \, D_k \, (1+o_R(1)) \, + \, A_m D_m S^{-1} (1+o_R(1)) \right\} \\ &= \Phi \cdot A_m D_m \, S^{-1} (1+o_R(1)) \\ &= A_m D_m \, (1-z)^i \, (S \cdot P)^{-1} \, (1+o_R(1)) \end{aligned}$$

Nun ist $A_m D_m \neq 0$; ferner haben wir $S(z) \cdot P(z) = O(1)$ für $z = \mathrm{Re}(z) \longrightarrow 1-$, daher konvergiert der letzte Ausdruck bei diesem Grenzübergang nicht. Also ist auch (s_n) nicht $[Q;q_n;0]$-limitierbar. Dagegen gilt $(1-z)^i = O(1)$ für $z \longrightarrow 1$, $z \in \mathbb{C}-[1,\infty]$ und folglich $[P;p_n;R]\text{-}\lim s_n = 0$ aufgrund von (5). Mithin ist $[P;R] \not\subset [Q;0]$.

Der Beweis zu (iii) läuft weitgehend analog. Gemäß (***) können wir ein $\alpha > \gamma$ mit $R(x) = O(x^{\alpha})$ für $x \longrightarrow 0+$ fixieren. Als Entsprechung zu (5) setzen wir jetzt

$$\text{(7)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n z^n \; := \; P(z) \, g(z) \, G(z)$$

mit

$$g(z) := (1-z)^{\varepsilon}$$

und

$$G(z) := \exp\left(i\,(1-z)^{\delta}\right),$$

beide Funktionen definiert in $\mathbb{C}-[1,\infty[$. Die noch freien Parameter ε und δ wählen wir gemäß $\gamma<\delta+1<\alpha$ und $0<\varepsilon<\delta+1-\gamma$. Da keiner der Koeffizienten p_n verschwindet, ist die Folge (s_n) wohldefiniert.

Nun folgt

$$\frac{G'}{G} = i\delta\,(1-z)^{-1-\delta}$$

sowie

$$\frac{g'}{g} = -\varepsilon\,(1-z)^{-1}$$

Also haben wir $G \in F_1^{\infty}\left((1-z)^{\delta+1}, i\delta\right)$ und $g \in F_2^{\infty}\left(1-z, -\varepsilon\right)$ aufgrund von Lemma 3.4.11. Ein weiteres Lemma (s. 3.4.5) bringt uns nun

$$\Phi = g\cdot G \in F_1^{m}\left((1-z)^{\delta+1}, i\delta\right)$$

Deswegen gilt für $0\le k\le m$

$$\text{(8)}\qquad \frac{\Phi^{(k)}}{\Phi} = D_k\,(1-z)^{-k(\delta+1)}\,(1+o_R(1))$$

Hierbei haben wir $D_k := (i\delta)^k$ gesetzt.
Nun kommt wieder Beziehung (6) zum Zuge, die uns nun auf

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned}\Phi_Q[s_n](z) &= \Phi\cdot\sum_{k=0}^{m-1} A_k D_k\,(1-z)^{-(\delta+1-\gamma)k}\,(1+o_R(1))\\ &\quad + \Phi\cdot A_m D_m\,(1-z)^{-(\delta+1-\gamma)m}\,S^{-1}\,(1+o_R(1))\\ &= \Phi\cdot A_m D_m\,(1-z)^{-(\delta+1-\gamma)m}\,S^{-1}\,(1+o_R(1))\end{aligned}$$

$$= A_m D_m \, G(z)\,(1-z)^{\varepsilon-(\delta+1-\gamma)m} \; S^{-1}\,(1+o_R(1))$$

mit $A_m D_m \neq 0$ führt.
Aus Lemma 2.3.4 folgt unmittelbar $[P;p_n;R]$-lim $s_n = 0$ für $R(x) = O(x^\alpha)$.
Andererseits gelten $|G(z)| = 1$, $|S^{-1}(z)| \longrightarrow \infty$ und, da $m \geq 1$,

$$|1-z|^{\varepsilon-m(\delta+1-\gamma)} \longrightarrow \infty$$

jeweils für $z = \mathrm{Re}(z) \longrightarrow 1-$.
Deswegen haben wir $|\Phi_Q[s_n](z)| \longrightarrow \infty$ für $z \longrightarrow 1-$ längs der reellen Achse, d.h., die betrachtete Folge (s_n) ist nicht $[Q;q_n;0]$-limitierbar.&

Offensichtlich erhalten wir durch Negation der Bedingungen (**) und (***) sofort notwendige Voraussetzungen für das Bestehen der Inklusion $[P;R] \subset [Q;0]$ bzw. $[P;R] \subset [Q;R]$.

Im folgenden gehen wir einen PE-Vergleichssatz für Potenzreihenverfahren aus den Familien F_1 und F_2 an. Als Vorbereitung beweisen wir eine Reihe von Hilfssätzen. Der erste wurde auch schon zum Beweis des vorigen Satzes benötigt.

3.4.5 LEMMA

Sei R eine Randfunktion. Für ein Paar $\mu,\nu \in \{1,2\}$ gelte $A \in F_\mu^m(T_A,a)$ und $B \in F_\nu^m(T_B,b)$. Ferner seien $a^{\uparrow m}$ und $b^{\uparrow m}$ von Null verschieden. Dann ist

$$A\cdot B \in \begin{cases} F_\mu^m(T_A,a), & T_A = o_R(T_B) \\ F_\nu^m(T_B,b), & T_B = o_R(T_A) \end{cases}$$

Wenn $T_A = T_B =: T$ und $\mu=\nu=:\lambda$, so gilt

$$A\cdot B \in F_\lambda^m(T,\, a+b)$$

Beweis: Wir setzen für alle k, $0 \leq k \leq m$,

(1) $$a_k := \begin{cases} a^k, & A \in F_1^m \\ a^{\uparrow k}, & A \in F_2^m \end{cases}$$

Die b_k definieren wir völlig analog. Es gilt nun

(2) $$\begin{aligned} \frac{(AB)^{(n)}}{AB} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{A^{(k)}}{A} \frac{B^{(n-k)}}{B} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_A^{-k} T_B^{-(n-k)} (a_k b_{n-k} + o_R(1)) \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir den Fall $T_B = o_R(T_A)$.

Wegen $T_A^{-k} T_B^{-(n-k)} = o_R(T_B^{-k}) T_B^{k} T_B^{-n} = o_R(T_B^{-n})$ und $a_k, b_k \neq 0$ für alle k, $0 \le k \le n$, ist dann in (2) allein das Summationsglied mit k=0 signifikant. Daher gilt

(3) $$\frac{(AB)^{(n)}}{AB} = T_B^{-n} (a_0 b_n + o_R(1))$$

Aufgrund von $a_0 = 1$ haben wir folglich $A \cdot B \in F_\nu^m(T_B, b)$ nachgewiesen. In gleicher Weise behandelt man den Fall $T_A = o_R(T_B)$.

Für $T := T_B = T_A$ erhalten wir

(4) $$\frac{(AB)^{(n)}}{AB} = T^{-n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} + o_R(1) \right\}$$

Somit ergibt sich im Falle $\nu = \mu = 1$, also $A \in F_1^m(T_A, a)$ und $B \in F_1^m(T_B, b)$,

(5) $$\frac{(AB)^{(n)}}{AB} = T^{-n} \left[(a+b)^n + o_R(1) \right]$$

Schließlich folgt für $\nu = \mu = 2$

$$(6) \qquad \frac{(AB)^{(n)}}{AB} = T^{-n}\left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\uparrow k} b^{\uparrow(n-k)} + o_R(1) \right\}$$

$$= T^{-n}\left\{ n! \sum_{k=0}^{n} \binom{a+k-1}{k}\binom{b+n-k-1}{n-k} + o_R(1) \right\}$$

$$= T^{-n}\left[n! \binom{a+b+n-1}{n} + o_R(1) \right]$$

$$= T^{-n}\left((a+b)^{\uparrow n} + o_R(1) \right)$$

Nach Definition 3.4.1 ist damit alles gezeigt. &

Das vorstehende Lemma ist wichtig für praktische Anwendungen des noch zu formulierenden Vergleichssatzes. Es besagt im wesentlichen die Abgeschlossenheit der relevanten Familien F_1 und F_2 bezüglich der Multiplikation. Eine gleichgerichtete Aussage über Reziproka macht der folgende Hilfssatz, der indes nur zum Beweis eines weiteren Lemmas von Interesse ist.

3.4.6 LEMMA

Sei R eine Randfunktion und $m \in \mathbb{N}$. Für eine Funktion P gelte $P \in F_\nu^m(T,c)$ mit $\nu=1$ oder $\nu=2$.

Dann ist $1/P \in F_\nu^m(T,-c)$, d.h., für alle k, $0 \le k \le m$, gilt

$$(1) \qquad P\left(\frac{1}{P}\right)^{(k)} = T^{-k} \begin{cases} (-c)^k + o_R(1), & P \in F_1^m \\ (-c)^{\uparrow k} + o_R(1), & P \in F_2^m \end{cases}$$

Beweis: Für $k=1$ ist die Behauptung wegen

$$(2) \qquad P\left(\frac{1}{P}\right)' = -\frac{P'}{P}$$

evident. Der Fall $k=0$ ist sogar trivial. Sei also (1) für $1 \le k \le n$ bewiesen. Wir vereinbaren

$$c_k := \begin{cases} c^k, & P \in F_1^m \\ c^{\uparrow k}, & P \in F_2^m \end{cases} \tag{3}$$

und

$$\bar{c}_k := \begin{cases} (-c)^k, & P \in F_1^m \\ (-c)^{\uparrow k}, & P \in F_2^m \end{cases} \tag{4}$$

Es folgt

$$P\left(\frac{1}{P}\right)^{(n+1)} = P\left(\left(\frac{1}{P}\right)'\right)^{(n)}$$

$$= -P\left(\frac{P'}{P} \cdot \frac{1}{P}\right)^{(n)} \tag{5}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{P'}{P}\right)^{(k)} P\left(\frac{1}{P}\right)^{(n-k)}$$

Hierbei ist

$$\left(\frac{P'}{P}\right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{P^{(j+1)}}{P} P\left(\frac{1}{P}\right)^{(k-j)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} T^{-(j+1)-(k-j)} \quad (c_{j+1}\bar{c}_{k-j} + o_R(1)) \tag{6}$$

$$= T^{-(k+1)} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c_{j+1}\bar{c}_{k-j} + o_R(1) \right\}$$

Für $P \in F_1^m$ lautet der exakte Teil der geklammerten Summe

$$S_k := \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c^{j+1} (-c)^{k-j}$$

(7) $$= c^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}$$

$$= \begin{cases} c & \text{für } k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $P \in F_2^m$ haben wir dagegen

$$S_k := \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c^{\uparrow(j+1)} (-c)^{\uparrow(k-j)}$$

(8) $$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c(c+1)\cdots(c+j) \cdot c(c-1) \cdots (c-(k-j)+1) \cdot (-1)^{k-j}$$

$$= k! \sum_{j=0}^{k} \binom{c+j}{j} \binom{c}{k-j} (-1)^{k-j} c$$

Durch Koeffizientenvergleich zwischen den Potenzreihenentwicklungen von $(1-x)^{-1}$ und $(1-x)^{c} \cdot (1-x)^{-c-1}$ erhalten wir leicht

(9) $$S_k = c\, k! \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Nun können wir mit (5) fortfahren

$$P\left(\frac{1}{P}\right)^{(n+1)} = - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (S_k + o_R(1))\, \bar{c}_{n-k}\, T^{-(k+1)-(n-k)}$$

$$= -T^{-(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k \bar{c}_{n-k} + o_R(1) \right\}$$

Für $P \in F_1^m$ gilt jetzt einfach

$$P\left(\frac{1}{P}\right)^{(n+1)} = -T^{-(n+1)}\left(c\,(-c)^{n} + o_R(1)\right)$$

(11)

$$= (-c)^{n+1}\, T^{-(n+1)}\, (1+o_R(1))$$

Damit haben wir diesen Fall erledigt. Zur Behandlung von $P \in F_2^m$ stützen wir uns auf (9) und folgern

$$P\left(\frac{1}{P}\right)^{(n+1)} = -c\, T^{-(n+1)} \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\,(-c)^{\uparrow(n-k)} + o_R(1)\right\}$$

$$= -c\, T^{-(n+1)}\ n!\left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{-c+k-1}{k} + o_R(1)\right\}$$

$$= -c\, T^{-(n+1)}\ n!\left[\binom{-c+n}{n} + o_R(1)\right]$$

$$= \ T^{-(n+1)}\left((-c)^{\uparrow(n+1)} + o_R(1)\right)$$

d.h., (1) ist auch für k=n+1 richtig. Wir haben daher die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen. &

3.4.7 LEMMA

Seien $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei Potenzreihenverfahren und* m, $\overline{m} \in \mathbb{N}$ *mit* $m \le \overline{m}$. *Für* $\nu=1$ *oder* $\nu=2$ *gelte* $P \in F_\nu^{\overline{m}}(T,c)$, *mit* $\mathrm{Re}(c)>0$. *Ferner gebe es eine PE-Folge* (d_n) *vom Grade* m, *so daß* $q_n=p_n d_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
d^* *sei der Koeffizient der höchsten Potenz des generierenden Polynoms. Es gilt*

(1) $$\frac{Q}{P} = d^*\, T^{-m} \begin{cases} c^{m} + o_R(1) \ , & P \in F_1^{\overline{m}} \\ c^{\uparrow m} + o_R(1)\ , & P \in F_2^{\overline{m}} \end{cases}$$

Wenn die beiden Potenzreihenverfahren normiert sind, dann ist

$Q \in F_1^{\overline{m}-m}(T,c)$, falls $P \in F_1^{\overline{m}}$ und $Q \in F_2^{\overline{m}-m}(T,c+m)$, falls $P \in F_2^{\overline{m}}$, jeweils unter der Voraussetzung $m < \overline{m}$.

Beweis: Nach Voraussetzung haben wir für $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le \overline{m}$

$$\frac{P^{(k)}}{P} = c_k T^{-k} + r_k \text{ , } r_k = o_R(T^{-k}) \tag{2}$$

wobei

$$c_k = \begin{cases} c^k & \text{für } P \in F_1^{\overline{m}} \\ c^{\uparrow k} & \text{für } P \in F_2^{\overline{m}} \end{cases}$$

Nach 3.2.10 können wir – wegen $q_n = p_n d_n$ – mit geeigneten b_k auf

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k P^{(k)}(z)(1+o_R(1)) \tag{3}$$

schließen. Insbesondere ist $b_m = d^* \neq 0$. (2) eingesetzt in (3) ergibt

$$\frac{Q}{P} = \sum_{k=0}^{m} \left(b_k z^k c_k T^{-k} + r_k\right) \tag{4}$$

$c_m \neq 0$ für $P \in F_1^{\overline{m}}$ ist klar. Wegen $\mathrm{Re}(c) > 0$ ist auch für $P \in F_2^{\overline{m}}$ $c_m \neq 0$. Der signifikante Term in (4) lautet daher schlicht.

$$\frac{Q}{P} = b_m c_m T^{-m}(1+o_R(1)) \tag{5}$$

Wir haben somit (1) bereits verifiziert. Zum Nachweis des Restes müssen wir (3), allerdings ohne den asymptotischen Faktor, weil wir jetzt nur noch normierte Verfahren betrachten, für $0 \le \varkappa \le \overline{m}-m$ differenzieren:

$$\frac{Q^{(\varkappa)}}{P} = \sum_{k=0}^{m} b_k \sum_{\lambda=0}^{\max(\varkappa,k)} \binom{\varkappa}{\lambda} k(k-1)\cdots(k-\lambda-1)\, z^{k-\lambda} \frac{P^{(k+\varkappa-\lambda)}}{P} \tag{6}$$

Mit Hilfe von (2) können wir diese Beziehung auf

$$(7) \qquad \frac{Q^{(\varkappa)}}{P} = b_m T^{-(m+\varkappa)} (c_{m+\varkappa} + o_R(1))$$

reduzieren. Diese Form erlaubt uns mit

$$(8) \qquad \frac{Q^{(\varkappa)}}{Q} = \frac{Q^{(\varkappa)}}{P} \cdot \frac{P}{Q}$$

und (5) den Schluß auf

$$(9) \qquad \begin{aligned} \frac{Q^{(\varkappa)}}{Q} &= T^{-\varkappa} \left[c_{m+\varkappa} c_m^{-1} + o_R(1) \right] \\ &= T^{-\varkappa} \begin{cases} c^{\varkappa} + o_R(1), & P \in F_1^{\overline{m}} \\ (c+m)^{\uparrow\varkappa} + o_R(1), & P \in F_2^{\overline{m}} \end{cases} \end{aligned}$$

für $0 \le \varkappa \le \overline{m} - m$. Dies ist das gewünschte Resultat. &

Über die eingangs angesprochene Bedeutung hinaus gewährt dieser Hilfssatz Einblick in die grundlegende Struktur sowohl der Familien F_1 und F_2 im allgemeinen als auch der betreffenden Potenzreihenverfahren im besonderen.

3.4.8 LEMMA

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.4.7 wählen wir $m = \overline{m}$, dann gilt, mit den Bezeichnungen von Lemma 3.2.7,

$$(1) \qquad f_k = T^k \binom{m}{k} \begin{cases} c^{-k} + o_R(1), & P \in F_1^m \\ \dfrac{\Gamma(c+m-k)}{\Gamma(c+m)} + o_R(1), & P \in F_2^m \end{cases}$$

für $0 \le k \le m$, und speziell

$$(2) \qquad f_m = T^m \begin{cases} c^{-m} + o_R(1), & P \in F_1^m \\ \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)} + o_R(1), & P \in F_2^m \end{cases}$$

Beweis: Nach Lemma 3.2.7 haben wir

(3) $$f_m = \frac{P}{Q} a_m$$

(4) $$f_k = \frac{P}{Q} a_k - \sum_{l=k+1}^{m} P\, g_{kl}\, f_l$$

mit

(5) $$g_{kl}(z) := \sum_{j=0}^{l-k} \binom{l}{j} \left(\frac{1}{P}\right)^{(j)} c_k^{(l-j)} z^j$$

für $0 \le k \le m \le l$. Hierbei sei, mit geeigneten $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \le k \le m$, gemäß Definition 3.2.6

(6) $$d_n = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k$$

Analog zum Beweis von Lemma 3.2.9 (i) betrachten wir zunächst Abschätzungen der g_{kl}. Wir haben

(7) $$[P;R] \in F_\nu^m(T,c) \text{ mit } \operatorname{Re}(c) > 0, \quad \nu \in \{1,2\}$$

Somit, aufgrund von Lemma 3.4.6

(8) $$P\left(\frac{1}{P}\right)^{(k)} = T^{-k}(\overline{c}_k + o_R(1)) .$$

Hierbei kommen die Bezeichnungen nach Lemma 3.4.6 (3) und (4) zum Zuge. Die Beziehung (5) wird nun zu

(9) $$g_{kl} = \sum_{j=0}^{l-k} \binom{l}{j} \frac{z^j}{P} c_k^{(l-j)} T^{-j}(\overline{c}_j + o_R(1))$$

Für $P \in F_1^m$ bzw. $P \in F_2^m$ und $c \notin \{1,2,\dots,m-1\}$ haben wir $\overline{c}_{l-k} \neq 0$. Daher gilt in diesen Fällen

(10) $$g_{kl} = \binom{l}{k} T^{k-l} P^{-1} (\overline{c}_{l-k} + o_R(1))$$

Dagegen ist für $c \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ und $P \in F_2^m$

$$\overline{c}_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu>c \\ (-1)^\nu c^{\downarrow\nu} & \text{für } \nu\leq c \end{cases} \tag{11}$$

Folglich können wir (9) auf

$$g_{kl} = \begin{cases} \binom{l}{c}(-1)^c\, c!\, c_k^{(l-c)}\, T^{-c} P^{-1}\, (1+o_R(1)), & l-k>c \\ \binom{l}{k}(-1)^{l-k}\, c^{\downarrow(l-k)}\, T^{k-l} P^{-1} (1+o_R(1)), & \text{sonst} \end{cases} \tag{12}$$

reduzieren. Hierbei war noch $c_k^{(\nu)} \neq 0$ für $0\leq\nu\leq k$ und $c_k^{(l-(l-k))}=1$ zu beachten.
Wir beweisen nun (1) und (2) mit einem Induktionsargument. In Verbindung mit Lemma 3.4.7 folgt aus (3) unmittelbar (2). Im weiteren stützen wir uns auf (2) und (4) und schließen sukzessive für $0\leq j\leq m$

$$f_{m-j} = T^{m-j}\binom{m}{j} \begin{cases} c^{j-m} + o_R(1)\,, & P\in F_1^m \\ \dfrac{\Gamma(c+j)}{\Gamma(c+m)} + o_R(1)\,, & P\in F_2^m \end{cases} \tag{13}$$

Für $j=0$ ist (13) evident. Sei also (13) für $0\leq j<\mu\leq m$ verifiziert, dann erhalten wir, $k=m-\mu$ gesetzt, im Falle $P\in F_1^m$ nach (4), (10) und (13)

$$\begin{aligned} \frac{Q}{P} f_k &= a_k - \frac{Q}{P}\sum_{l=k+1}^{m} f_l\, P\, g_{kl} \\ &= a_k - \frac{Q}{P}\sum_{l=k+1}^{m} \binom{m}{l} c^{-l}\, T^l \binom{l}{k} (-c)^{l-k}\, T^{k-l} (1+o_R(1)) \\ &= a_k - \frac{Q}{P} T^k c^{-k} \sum_{l=k+1}^{m} \binom{m}{l}\binom{l}{k}(-1)^{l-k}\, (1+o_R(1)) \end{aligned} \tag{14}$$

Wegen

$$(15)\quad \sum_{l=k}^{m} \binom{m}{l}\binom{l}{k}(-1)^{l-k} = \binom{m}{k} \sum_{l=k}^{m} \binom{m-k}{l-k}(-1)^{l-k} = \begin{cases} 0 & \text{für } m>k \\ 1 & \text{für } m=k \end{cases}$$

folgt für die innere Summe in (14) $A=-\binom{m}{k}$ (Für $m>k$, nur dieser Fall ist interessant). Also ergibt sich

$$(16)\quad f_k = a_k c^{-m} T^m (1+o_R(1)) + \binom{m}{k} c^{-k} T^k (1+o_R(1)) = \binom{m}{k} c^{-k} T^k (1+o_R(1))$$

Der Fall $P \in F_1^m$ ist damit erledigt. Für $P \in F_2^m$ und $c \notin \{1,2,\dots,m-1\}$ erhalten wir anstelle von (14)

$$(17)\quad \frac{Q}{P} f_k = a_k - \frac{Q}{P} T^k \sum_{l=k+1}^{m} \binom{m}{l}\binom{l}{k} \frac{\Gamma(c+m-l)}{\Gamma(c+m)} c^{\downarrow(l-k)}(-1)^{l-k} (1+o_R(1))$$

Nun ist aber

$$(18)\quad \begin{aligned} &\sum_{l=k}^{m} \binom{m}{l}\binom{l}{k}(-1)^{l-k} c^{\downarrow(l-k)} c^{\uparrow(m-l)} \\ &= \binom{m}{k} \sum_{l=k}^{m} \binom{m-k}{l-k}(-1)^{l-k} c^{\downarrow(l-k)} c^{\uparrow(m-l)} \\ &= \binom{m}{k} \sum_{\nu=0}^{m-k} \binom{m-k}{\nu}(-1)^{\nu} c(c-1)\cdots(c-\nu+1)\ c(c+1)\cdots(c+(m-k-\nu)-1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } m>k \\ 1 & \text{für } m=k \end{cases} \end{aligned}$$

folglich wird die Summe in (18) zu

$$A = -\binom{m}{k}\frac{\Gamma(c+m-k)}{\Gamma(c+m)} \tag{19}$$

Daher gilt jetzt

$$\begin{aligned} f_k &= a_k \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)} T^m (1+o_R(1)) - A\,T^k (1+o_R(1)) \\ &= \binom{m}{k}\frac{\Gamma(c+m-k)}{\Gamma(c+m)} T^k \, (1+o_R(1)) \end{aligned} \tag{20}$$

Der noch verbleibende Fall $P \in F_2^m$ und $c \in \{1,2,\dots,m-1\}$ wird analog erledigt. Die Beziehung (17) geht nach (12) über in

$$\begin{aligned} \frac{Q}{P} f_k &= a_k - \frac{Q}{P} T^k \sum_{l=k+1}^{k+c} \binom{m}{l}\binom{l}{k}\frac{\Gamma(c+m-l)}{\Gamma(c+m)} c^{\downarrow(l-k)} (-1)^{l-k} \, (1+o_R(1)) \\ &\quad - \frac{Q}{P} T^k \sum_{l=k+c+1}^{m} \binom{m}{l}\binom{l}{c}\frac{\Gamma(c+m-l)}{\Gamma(c+m)} c!\, c_k^{(l-c)} (-1)^c \, T^{l-(k+c)} (1+o_R(1)) \end{aligned} \tag{21}$$

Die zweite Summe in (21) verhält sich beim Grenzübergang $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$ etwa wie $Q P^{-1} \, T^{k+1}(1+o_R(1))$. Daher brauchen wir nur noch die erste Summe zu betrachten. Diese ist aber – bis auf die obere Summationsgrenze, die $k+c$ statt m lautet – identisch mit der entsprechenden Summe in (17). Formel (18) kommt deswegen mit der obereren Summationsgrenze $k+c$ für m bzw. c für $m-k$ zum Tragen. D.h., (19) behält auch hier unverändert Gültigkeit. Folglich bekommen wir

$$\begin{aligned} f_k &= a_k \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)} T^m - A\,T^k - o_R(T^{k+1}) \\ &= \binom{m}{k}\frac{\Gamma(c+m-k)}{\Gamma(c+m)} T^k \, (1+o_R(1)) \end{aligned} \tag{22}$$

womit der Induktionsschritt zum Nachweis von (13) vollzogen ist. &

Nach dieser Folge von Hilfssätzen kommen wir nun endlich zu dem angestrebten Vergleichssatz.

3.4.9 SATZ

Sei $[P;p_n;R]$ *ein Potenzreihenverfahren und* $m\in\mathbb{N}$. *Für* $\nu=1$ *bzw.* $\nu=2$ *gelte* $P\in F_\nu^m(T,c)$ *mit* $\mathrm{Re}(c)>0$. *Weiter sei* $[Q;q_n;R]$ *ein zweites Potenzreihenverfahren und* (d_n) *eine PE-Folge vom Grade* m *mit* $q_n=p_nd_n$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$.

Die beiden folgenden Behauptungen snd richtig:

(i) *Die Existenz einer glatten und totalen Randabstandsfunktion* h *aus* $HR(R)$ *mit*

(*) $T=O_R(h)$

ist eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Inklusion $[P;p_n;R]\subset[Q;q_n;R]$

(ii) *Wenn* $T(z)\equiv(1-z)^\gamma$ *mit einem* $\gamma\geq1$, $p_n\neq0$ *für alle* $n\geq0$ *und*

(**) $\exists\alpha>\gamma\colon\ R(x)=O(x^\alpha)$ für $x\longrightarrow0+$

dann gilt $[P;p_n;R]\not\subset[Q;q_n;0]$.

Beweis: Nach Lemma 3.4.8 gibt es Konstanten $C_k\neq0$, $0\leq k\leq m$, so daß

(1) $$f_k = C_k T^k(1+o_R(1))$$

Ferner gilt

(2) $$\frac{P}{Q}=A\,T^m(1+o_R(1))$$

mit einer Konstanten $A\neq0$. Voraussetzungsgemäß ist weiter

(3) $$\frac{P'}{P}=c\,T^{-1}(1+o_R(1))\ ,\qquad c\neq0$$

Die Behauptung (i) wird hiermit rasch verifiziert; (2) und (3) ziehen

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q}\left(\frac{P'}{P}\right)^m &= A\,c^m\,(1+o_R(1)) \\ &= O_R(1) \end{aligned} \tag{4}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{P}{P'} &= c^{-1}\,T\,(1+o_R(1)) \\ &= O_R(h) \end{aligned} \tag{5}$$

nach sich. Wegen Satz 3.2.11 ist das bereits (i).

Zum Nachweis von (ii) verwenden wir die sinngemäß gleiche Argumentation wie im Beweis von 3.4.4 (ii) und (iii). Wegen 3.2.8 und (1) haben wir zunächst

$$\Phi_Q[s_n](z) = \sum_{k=0}^{m} C_k\,(1-z)^{\gamma k}\,\Phi_P^{(k)}[s_n](z)\,\,(1+o_R(1)) \tag{6}$$

Nunmehr können wir den auf Formel 3.4.4 (9) hinführenden Teil des Beweises zu 3.4.4 (iii) wortgleich kopieren, insbesondere wählen wir also ein $\alpha > \gamma$ mit $R(x)=O(x^{\alpha})$ für $x \longrightarrow 0+$ und spezifizieren eine Folge (s_n) über

$$\Phi_P[s_n](z) := \frac{1}{P(z)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n z^n := (1-z)^{\varepsilon} \exp\left(\, i(1-z)^{-\delta}\right),\ i=\sqrt{-1} \tag{7}$$

mit $\gamma < \delta+1 < \alpha$ und $0 < \varepsilon < \delta+1-\gamma$. Analog zu 3.4.4 (9) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} \Phi_Q[s_n](z) &= \Phi_P[s_n](z) \sum_{k=0}^{m} C_k D_k\,(1-z)^{-(\delta+1-\gamma)k}\,(1+o_R(1)) \\ &= C_m D_m \exp\left(\, i(1-z)^{-\delta}\right)(1-z)^{\varepsilon-(\delta+1-\gamma)m}\,(1+o_R(1)) \end{aligned} \tag{8}$$

mit $C_m D_m \neq 0$. Wie am genannten Ort folgt wieder $s_n \longrightarrow 0\,[P;p_n;R]$, aber s_n wird nicht durch $[Q;q_n;0]$ limitiert. &

Für Standard-Randfunktionen hat Teil (ii) der bewiesenen Variante des PE-Vergleichssatzes 3.2.11 eine bemerkenswerte Konsequenz:
Zunächst gewinnen wir aus 3.4.9 (**) durch Negation die notwendige Inklusionsbedingung

$$\forall \alpha>\gamma: \quad R(x) \neq O(x^{\alpha}) \quad \text{für } x \longrightarrow 0+$$

und hieraus — dieser Schluß ist für beliebig vorgegebene Randfunktionen nicht vollziehbar —

$$\forall \alpha>\gamma: \quad x^{\alpha} = o(R(x)) \quad \text{für } x \longrightarrow 0+$$

Da R als eine Standard-Randfunktion vorausgesetzt war, gibt es ein $\delta>0$ und ein $\beta>0$, so daß $R(x) = \beta x^{\delta}$. Daher können wir schließen

$$\forall \alpha>\gamma: \quad \alpha>\delta$$

also $\gamma \geq \delta$ und somit auch $x^{\gamma} = O(R(x))$ für $x \longrightarrow 0+$.

Standard-Randfunktionen mit einem Exponenten $\delta \geq 1$ sind zugleich glatte und totale holomorphe Randabstandsfunktionen. Ferner ist $R(\text{Re}(1-z)) = O(R(1-z))$ sowie $(1-z)^{\gamma} = O((\text{Re}(1-z))^{\gamma})$ für $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R)$. Demnach folgt aus $x^{\gamma} = O(R(x))$ für $x \longrightarrow 0+$ sofort

$$\begin{aligned}(1-z)^{\gamma} &= O((\text{Re}(1-z))^{\gamma}) \\ &= O(R(\text{Re}(1-z))) \\ &= O(R(1-z)) \qquad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)\end{aligned}$$

Diese letzte Bedingung ist aber nach 3.4.9 (i) hinreichend für die Inklusion $[P;p_n;R] \subset [Q;q_n;R]$. Daher haben wir fast schon gezeigt:

3.4.10 SATZ

Sei R eine Standard-Randfunktion mit $R(x) = \beta x^{\delta}$, $\beta>0$, $\delta \geq 1$, $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei Potenzreihenverfahren sowie* (d_n) *eine* PE^m*-Folge mit* $q_n = p_n d_n$. *Ferner gebe es ein* $\gamma \geq 1$ *und ein* $c \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(c)>0$, *so daß* $P \in F_1^m\left((1-z)^{\gamma}, c\right)$ *oder* $P \in F_2^m\left((1-z)^{\gamma}, c\right)$.

Es bestehen die Äquivalenzen

$$[P;p_n;R] \subset [Q;q_n;R] \iff [P;p_n;R] \subset [Q;q_n;0]$$
$$\iff \gamma \geq \delta$$

Beweis: Nach den obigen Ausführungen haben wir

$$\gamma \geq \delta \iff x^\gamma = O(R(x)) \implies [P;p_n;R] \subset [Q;q_n;R]$$

und

$$\gamma < \delta \implies \neg\big([P;p_n;R] \subset [Q;q_n;0]\big)$$

Daraus folgt die Behauptung unmittelbar. &

Dieses Resultat macht klar, daß sich die Bedingungen (i) und (ii) des Hauptsatzes 3.2.11 im allgemeinen nicht abschwächen lassen. Tatsächlich ist ja für Standard-Randfunktionen — wie oben belegt — $\gamma \geq \delta$ äquivalent mit $(1-z)^\gamma = O(R(1-z))$. In der Situation von Satz 3.4.10 ist nun

$$h(z) := R(1-z) = (1-z)^\delta$$

eine glatte und totale holomorphe Randabstandsfunktion zu R. Andererseits gilt

$$\frac{P'}{P} = (1-z)^{-\gamma}(c+o_R(1))$$

Daher ist, unter den Voraussetzungen von Satz 3.4.10,

$$\frac{P}{P'} = O_R(h)$$

eine notwendige und hinreichende Vergleichsbedingung im Sinne von Satz 3.2.11.

Zur Vervollständigung der Beweise zu den Sätzen 3.4.4 und 3.4.9 und im Hinblick auf Anwendungen dieser Aussagen geben wir abschließend eine simple hinreichende Bedingung für $f \in F_1^m$ bzw. $f \in F_2^m$. In Verbindung mit Lemma 3.4.5 eröffnen sich damit vielfältige Möglichkeiten zur Nutzung der Ergebnisse dieses Abschnitts.

3.4.11 LEMMA

Sei R eine Randfunktion. Für ein $\delta>0$ *sei ferner f holomorph in* $S_\delta(R)$ *und* ω *holomorph auf* $S_\delta(R)\cup\{1\}$ *mit* $\omega(1)=c\in\mathbb{C}-\{0\}$.
Wenn es ein $\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma\geq 1$, *gibt , so daß*

$$\text{(1)} \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \omega(z)\,(1-z)^{-\gamma} \quad \text{für alle } z\in S_\delta(R)$$

dann ist $f\in F_1^\infty$, *falls* $\gamma>1$ *und* $f\in F_2^\infty$, *falls* $\gamma=1$; *genauer, für alle* $k\in\mathbb{N}$ *gilt*

$$\text{(2)} \qquad \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = (1-z)^{-\gamma k} \begin{cases} c^k + o_R(1), & \gamma>1 \\ c^{\uparrow k} + o_R(1), & \gamma=1 \end{cases}$$

Ist speziell ω *eine Konstante, so kann im Fall* $\gamma=1$ *das asymptotische Glied entfallen.*

Beweis: Sei

$$\text{(3)} \qquad g(z) := \omega(z)\,(1-z)^{-\gamma}$$

Wir gehen induktiv vor. Als erstes haben wir

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} f^{(k+1)} &= (f')^{(k)} \\ &= (fg)^{(k)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} f^{(k-\nu)}\, g^{(\nu)} \end{aligned}$$

Weiter gilt für alle $m\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{g^{(m)}}{g^{m+1}} &= \frac{(1-z)^{\gamma(m+1)}}{\omega^{m+1}} \left[\omega\cdot(1-z)^{-\gamma}\right]^{(m)} \\ &= \frac{(1-z)^{\gamma(m+1)}}{\omega^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} \left[(1-z)^{-\gamma}\right]^{(\nu)} \omega^{(m-\nu)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(1-z)^{\gamma(m+1)}}{\omega^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} \frac{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+\nu-1)}{(1-z)^{\gamma+\nu}} \omega^{(m-\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} \gamma^{\uparrow\nu} \frac{\omega^{(m-\nu)}}{\omega^{m+1}} (1-z)^{\gamma m-\nu}$$

mithin

$$\frac{g^{(m)}}{g^{m+1}} = \gamma^{\uparrow m} \omega^{-m} (1-z)^{(\gamma-1)m} (1+r(z)) \tag{6}$$

wobei $r(z)\equiv 0$ für $\omega\equiv c$ und $r(z)=o_R(1)$ sonst.

Im Sinne dieser Ableitung schreiben wir (4) neu:

$$\begin{aligned} \omega^{k+1} \frac{f^{(k+1)}}{f g^{k+1}} &= \omega \cdot \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \omega^{k-\nu} \frac{f^{(k-\nu)}}{f g^{k-\nu}} \omega^{\nu} \frac{g^{(\nu)}}{g^{\nu+1}} \\ &= \omega\, \omega^{k} \frac{f^{(k)}}{f g^{k}} + \sum_{\nu=1}^{k} \binom{k}{\nu} \omega^{k-\nu} \frac{f^{(k-\nu)}}{f g^{k-\nu}} \gamma^{\uparrow\nu} (1-z)^{(\gamma-1)\nu} (1+r(z)) \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Form erlaubt nun die Anwendung eines Induktionsarguments. Wir behandeln zuerst den Fall $\gamma>1$. Die Behauptung ist für $k=1$ offensichtlich zutreffend. Sei also (2) richtig für $1\le k\le m$. Sodann verschwindet der hinter dem Summensymbol stehende Ausdruck etwa wie $o_R(1)$ (Man beachte $\gamma>1$ und (3)). Als einzig signifikanter Term verbleibt daher nur der erste Summand. Der Induktionsschritt folgt nun sehr einfach

$$\begin{aligned} (1-z)^{\gamma(k+1)} \frac{f^{(k+1)}}{f} &= \omega^{k+1} \frac{f^{(k+1)}}{f g^{k+1}} \\ &= \omega\, \omega^{k} \frac{f^{(k)}}{f g^{k}} + o_R(1) \\ &= \omega (1-z)^{\gamma k} \frac{f^{(k)}}{f} + o_R(1) \end{aligned} \tag{8}$$

$$= \omega\, c^{k} + o_{R}(1)$$

$$= c^{k+1} + o_{R}(1)$$

Für $\gamma=1$ schließen wir analog: Sei zunächst ω nicht-konstant. Konkret wird dann (7) zu

$$\omega^{k+1} \frac{f^{(k+1)}}{f\, g^{k+1}} = \omega \cdot \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \left[c^{\uparrow(k-\nu)} + o_{R}(1) \right] \nu!$$

$$= \omega\, k! \sum_{\nu=0}^{k} \frac{c(c+1)\cdots(c+k-\nu-1)}{(k-\nu)!} + o_{R}(1)$$

$$(9) \qquad = \omega\, k! \sum_{\nu=0}^{k} \binom{c+\nu-1}{\nu} + o_{R}(1)$$

$$= \omega\, k! \binom{c+k}{k} + o_{R}(1)$$

$$= c^{\uparrow(k+1)} + o_{R}(1)$$

Folglich ist (2) auch im Falle $\gamma=1$ evident.

Zum Nachweis des Zusatzes müssen wir nur bedenken, daß für $\omega \equiv c$ das Restglied $r(z)$ in (7) identisch verschwindet und daher auch in (9) keine Landau'schen Symbole mehr auftreten. &

3.5 Taubersätze

Die im vorangehenden Abschnitt entwickelten Aussagen (s. Lemmata 3.4.3 und 3.4.8) über das Verhalten der Funktionen f_k im Sinne von Transformation 3.2.8 (2), nutzen wir im folgenden als wichtige Hilfsmittel zum Beweis einiger relativ allgemein gehaltener Taubersätze. Konkrete Anwendungen dieser Sätze besprechen wir in in den Abschnitten 4.1 und 4.2 .

$$= \omega\, c^{k} + o_R(1)$$

$$= c^{k+1} + o_R(1)$$

Für $\gamma=1$ schließen wir analog: Sei zunächst ω nicht-konstant. Konkret wird dann (7) zu

$$\begin{aligned}
\omega^{k+1} \frac{f^{(k+1)}}{f\, g^{k+1}} &= \omega \cdot \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \left[c^{\uparrow(k-\nu)} + o_R(1) \right] \nu! \\
&= \omega\, k! \sum_{\nu=0}^{k} \frac{c(c+1)\cdots(c+k-\nu-1)}{(k-\nu)!} + o_R(1) \\
&= \omega\, k! \sum_{\nu=0}^{k} \binom{c+\nu-1}{\nu} + o_R(1) \qquad (9) \\
&= \omega\, k! \binom{c+k}{k} + o_R(1) \\
&= c^{\uparrow(k+1)} + o_R(1)
\end{aligned}$$

Folglich ist (2) auch im Falle $\gamma=1$ evident.

Zum Nachweis des Zusatzes müssen wir nur bedenken, daß für $\omega \equiv c$ das Restglied $r(z)$ in (7) identisch verschwindet und daher auch in (9) keine Landau'schen Symbole mehr auftreten. &

3.5 Taubersätze

Die im vorangehenden Abschnitt entwickelten Aussagen (s. Lemmata 3.4.3 und 3.4.8) über das Verhalten der Funktionen f_k im Sinne von Transformation 3.2.8 (2), nutzen wir im folgenden als wichtige Hilfsmittel zum Beweis einiger relativ allgemein gehaltener Taubersätze. Konkrete Anwendungen dieser Sätze besprechen wir in in den Abschnitten 4.1 und 4.2 .

$$= \omega\, c^{k} + o_R(1)$$

$$= c^{k+1} + o_R(1)$$

Für $\gamma=1$ schließen wir analog: Sei zunächst ω nicht-konstant. Konkret wird dann (7) zu

$$\omega^{k+1} \frac{f^{(k+1)}}{f\, g^{k+1}} = \omega \cdot \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \left[c^{\uparrow(k-\nu)} + o_R(1) \right] \nu!$$

$$= \omega\, k! \sum_{\nu=0}^{k} \frac{c(c+1)\cdots(c+k-\nu-1)}{(k-\nu)!} + o_R(1)$$

(9)

$$= \omega\, k! \sum_{\nu=0}^{k} \binom{c+\nu-1}{\nu} + o_R(1)$$

$$= \omega\, k! \binom{c+k}{k} + o_R(1)$$

$$= c^{\uparrow(k+1)} + o_R(1)$$

Folglich ist (2) auch im Falle $\gamma=1$ evident.

Zum Nachweis des Zusatzes müssen wir nur bedenken, daß für $\omega \equiv c$ das Restglied $r(z)$ in (7) identisch verschwindet und daher auch in (9) keine Landau'schen Symbole mehr auftreten. &

3.5 Taubersätze

Die im vorangehenden Abschnitt entwickelten Aussagen (s. Lemmata 3.4.3 und 3.4.8) über das Verhalten der Funktionen f_k im Sinne von Transformation 3.2.8 (2), nutzen wir im folgenden als wichtige Hilfsmittel zum Beweis einiger relativ allgemein gehaltener Taubersätze. Konkrete Anwendungen dieser Sätze besprechen wir in in den Abschnitten 4.1 und 4.2 .

$$= \omega c^{k} + o_R(1)$$

$$= c^{k+1} + o_R(1)$$

Für γ=1 schließen wir analog: Sei zunächst ω nicht-konstant. Konkret wird dann (7) zu

$$\omega^{k+1} \frac{f^{(k+1)}}{f g^{k+1}} = \omega \cdot \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \left[c^{\uparrow(k-\nu)} + o_R(1) \right] \nu!$$

$$= \omega \, k! \sum_{\nu=0}^{k} \frac{c(c+1)\cdots(c+k-\nu-1)}{(k-\nu)!} + o_R(1)$$

$$(9) \qquad = \omega \, k! \sum_{\nu=0}^{k} \binom{c+\nu-1}{\nu} + o_R(1)$$

$$= \omega \, k! \binom{c+k}{k} + o_R(1)$$

$$= c^{\uparrow(k+1)} + o_R(1)$$

Folglich ist (2) auch im Falle γ=1 evident.

Zum Nachweis des Zusatzes müssen wir nur bedenken, daß für $\omega \equiv c$ das Restglied $r(z)$ in (7) identisch verschwindet und daher auch in (9) keine Landau'schen Symbole mehr auftreten. &

3.5 Taubersätze

Die im vorangehenden Abschnitt entwickelten Aussagen (s. Lemmata 3.4.3 und 3.4.8) über das Verhalten der Funktionen f_k im Sinne von Transformation 3.2.8 (2), nutzen wir im folgenden als wichtige Hilfsmittel zum Beweis einiger relativ allgemein gehaltener Taubersätze. Konkrete Anwendungen dieser Sätze besprechen wir in in den Abschnitten 4.1 und 4.2 .

Zur Verifikation verweisen wir auf FISCHER [16] (s. Satz 2.4.7, S. 56). Die dort gegebene Argumentation kann — mit den notwendigen Änderungen — übernommen werden.

3.5.5 SATZ

Seien $[P;p_n;R]$ *und* $[Q;q_n;R]$ *zwei Potenzreihenverfahren mit einer Stolz'schen Randfunktion R. Es existiere eine PE-Folge* (d_n) *vom Grade m mit* $q_n=p_nd_n$.

Weiter möge gelten $P\in F_1^m(1-z,c)$ *oder* $P\in F_2^m(1-z,c)$.

Eine $[P;p_n;0]$*-limitierbare Folge* (s_n) *ist dann, unter der Voraussetzung*

$$(*) \qquad \exists\varepsilon>0: \quad (1-z)^{m-\varepsilon}\,\Phi_P^{(m)}[s_n](z) = O_R(1)\ ,$$

auch $[Q;q_n;R]$*-limitierbar.*

Beweis: Ein $\varepsilon>0$ sei fixiert. Offensichtlich haben wir

$$(1) \qquad (1-z)^{m-\varepsilon/2}\,\Phi_P^{(m)}[s_n](z) = o_R(1)$$

d.h., die Bedingung 3.5.3 (*) ist für $\gamma=1$ erfüllt. Weiter ergibt sich mit Hilfe von Lemma 2.2.8 (iii)

$$(2) \qquad \Phi_P[s_n](z) = O_R(1)$$

Mit dem Hinweis auf Satz 3.5.4 wird nun die Folgerung "(s_n) ist $[P;p_n;R]$- limitierbar" belegt. Daher folgt die Behauptung unter Berücksichtigung von Satz 3.5.3. &

Auch die Variante 3.5.5 des Taubersatzes 3.5.4 erscheint kaum mit abgeschwächten Voraussetzungen beweisbar. Setzen wir z.B. in 3.5.5 (*) $\varepsilon=0$ und $o_R(1)$ für $O_R(1)$, dann bringt die bisher nicht benötigte Teilaussage (ii) von Lemma 2.2.8 lediglich $\Phi_P[s_n](z) = o_R(\log|1-z|)$. Das ist aber im allgemeinen zu wenig, um den in 3.5.5 formulierten Schluß durchführen zu können.

4. Anwendungen

4.1 Abel-Verfahren

Die von BORWEIN [7] eingeführte Verallgemeinerung A_α des klassischen Abel-Verfahrens $A=A_0$ ist vermutlich die meistdiskutierte Klasse spezieller Potenzreihenverfahren. Dies wird nicht zuletzt durch den einfachen Aufbau begründet. In der Tat lassen sich hier einige Aussagen aus der allgemeinen Theorie in prägnante Sätze fassen.

4.1.1 BEMERKUNG

Das Permanenzproblem bezüglich nichtverschwindender Randfunktionen hat zuerst Stolz behandelt (s. KNOPP [25], S. 419 ff). Er betrachtet allerdings nur A_0. Aus neuerer Zeit liegt hierzu ein Ergebnis von SRIDHAR [30], der die Permanenz der A_α für Stolz'sche Winkel nachweist, vor.

Mit den uns zu Gebote stehenden Mitteln können wir eine Permanenzaussage wie folgt formulieren:

> Ein Abel-Verfahren $A_\alpha(R)$ ist permanent genau dann, wenn $R(x)=O(x)$ für $x \longrightarrow 0+$.

Zur Verifikation genügt der Hinweis auf Lemma 3.1.4. Die Notwendigkeit der angegebenen Permanenzbedingung geht – für A_0 – auf HOLZER [21] zurück.

Im Zusammenhang mit den in Abschnitt 3.4 formulierten Begriffsbildungen entpuppen sich Abel-Verfahren als spezielle Verfahren aus der Klasse F_2, genauer, es gilt $A_\alpha \in F_2^\infty(1-z,\alpha+1)$. Dies zeigt man sehr einfach mit Hilfe von Lemma 3.4.11. Für geeignete Paare von Abel-Verfahren läßt sich daher

Vergleichssatz 3.4.9 anwenden. Wir kommen darauf beim Beweis von Satz 4.1.3 zurück.

Als erstes erweitern wir den von BORWEIN stammenden Hauptsatz für den Vergleich von Abel-Verfahren.

4.1.2 SATZ (Für R≡0 vgl. BORWEIN [7], Theorem 2, S. 319)
Seien $\alpha>\beta>-1$ und R eine Randfunktion mit $R(x)=O(x)$ für $x\longrightarrow 0+$. Dann gilt

$$A_\alpha(R) \subset A_\beta(R)$$

Beweis: Seien für alle $n\geq 0$

$$p_n = \binom{n+\alpha}{n}, \qquad q_n = \binom{n+\beta}{n},$$

sowie

$$P(z) = (1-z)^{-\alpha-1} \quad \text{und} \quad Q(z) = (1-z)^{-\beta-1}$$

Die Voraussetzungen von Lemma 3.1.5 sind erfüllt, daher dürfen wir auf $Q(|z|) = O(|Q(z)|)$ für $z\longrightarrow 1$, $z\in S(R)$, schließen. Des weiteren erhalten wir mit

$$d\chi(t) := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\beta)}\, t^\beta\,(1-t)^{\alpha-\beta-1}\,dt$$

sofort

$$q_n = p_n \int_0^1 t^n\, d\chi(t)\,, \qquad n\geq 0.$$

Ferner gilt $\chi(t)\geq 0$ für $t\in[0,1]$, aufgrund von Lemma 3.1.3 bekommen wir also

$$\int_0^1 |Q(tz)|\,|d\chi(t)| = O(|Q(z)|) \quad \text{für } z\longrightarrow 1,\ z\in S(R)$$

Den Bedingungen von Satz 3.1.2 ist demnach Genüge getan. Es folgt daher

$$A_\alpha(R) = [P;p_n;R] \subset [Q;q_n;R] = A_\beta(R) \qquad \&$$

Für $R\equiv 0$ konnte BORWEIN zeigen, daß die bewiesene Inklusion echt ist, also $A_\alpha \subsetneq A_\beta$ für $\alpha>\beta>-1$ (s. [7], Theorem 3, S. 319). Diese Aussage gilt jedoch im allgemeinen Fall nicht mehr (s. hierzu die Sätze 4.1.4 und 4.1.5).

Als Konkretisierung von Satz 3.2.8 verifizieren wir nun eine interessante Beziehung zwischen Φ_α und $\Phi_{\alpha+1}$ die früher schon von MISHRA (s. [26], Formel (1.2)) bemerkt wurde. Im Kontext der Ausführungen von Abschnitt 3.2 stellt sich die in Rede stehende Relation indes lediglich als Spezialfall von 3.2.8 (2) in Verbindung mit 3.2.7 (4) dar. Dies wird auch durch den gegebenen Beweis deutlich gemacht.

Zur Notation sei folgendes vermerkt: Anstelle von Φ_P bzw. $\Phi_{[P;p_n;R]}$ schreiben wir für $[P;p_n;R] = A_\alpha(R)$ im weiteren stets kürzer Φ_α.

Dies kann nicht zu Mißverständnissen führen, weil es sich bei den Abel-Verfahren um normierte Potenzreihenverfahren handelt. Welche Randfunktion gemeint ist, geht dabei stets aus dem Zusammenhang hervor.

4.1.3 LEMMA

Sei $\alpha>-1$, (s_n) *irgendeine Folge und*

$$\Phi_\alpha[s_n](z) := (1-z)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} s_n z^n$$

Φ_α *sei holomorph in einem Gebiet* $D \supset [0,1[$.

Es gilt

$$(*) \qquad \Phi_{\alpha+1}[s_n](z) = \frac{z(1-z)}{\alpha+1}\, \Phi'_\alpha[s_n](z) + \Phi_\alpha[s_n](z)$$

für alle $z \in D$.

Beweis: Wir haben $\displaystyle \binom{n+\alpha+1}{n} = \frac{n+\alpha+1}{\alpha+1}\binom{n+\alpha}{n}$

Daher können wir Lemma 3.2.7 anwenden und finden (mit der dort verwendeten Notation)

$$f_1(z) = \frac{1-z}{\alpha+1} \quad \text{sowie} \quad f_0(z) = 1$$

Die Details bleiben dem Leser überlassen.
Mit Blick auf Satz 3.2.8 ist demnach alles gezeigt. &

Natürlich kann die Beziehung 4.1.3 (*) auch auf direktem Wege bewiesen werden. Die entsprechende Rechnung ist zwar elementar aber doch relativ langwierig. Nebenbei bemerkt, der beschriebene formelmäßige Zusammenhang zwischen Φ_α und $\Phi_{\alpha+1}$ war Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit.

Basierend auf 4.1.3 (*) ließe sich nun mit Hilfe von Satz 2.2.6 sehr einfach eine eingeschränkte Umkehrung der Vergleichsaussage 4.1.2 verifizieren. Nachdem wir nun aber die anwendungsträchtigen Sätze 3.2.11 und 3.4.9/10 zur Verfügung haben, können wir einen eleganteren Beweis führen:

Sei $\alpha>-1$ und R eine Stolz'sche Randfunktion. Wir setzen $[P;p_n;R]:= A_\alpha(R)$ und $[Q;q_n;R]:=A_{\alpha+1}(R)$. Bereits eingangs dieses Abschnitts haben wir $P \in F_2^\infty(1-z,\alpha+1)$ bemerkt. Weiter gilt

$$q_n = \binom{n+\alpha+1}{n} = \frac{n+\alpha+1}{\alpha+1}\binom{n+\alpha}{n}$$

$$= \left(1+\frac{n}{\alpha+1}\right)p_n$$

also ist $\left(q_n p_n^{-1}\right)$ eine PE-Folge vom Grade 1.

Nach Voraussetzung existiert ein $\beta\in\mathbb{R}$, $\beta>0$, mit $R(x)=\beta x$. Aufgrund von Satz 2.2.5 und Definition 2.1.1 ist $h(z):=1-z$ eine geeignete Randabstandsfunktion zu R im Sinne von Satz 3.4.9 (i). Daher bekommen wir $[P;R] \subset [Q;R]$. Andererseits schließt man für beliebige Randfunktionen R aus letzterem und 3.4.9 (ii): Es gibt kein $\sigma>1$ mit $R(x)=O(x^\sigma)$ für $x\longrightarrow 0+$. d.h., für alle $\sigma>1$ gilt $R(x)\neq O(x^\sigma)$. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn $x^\sigma=o(R(x))$ für alle $\sigma>1$.

Daher haben wir gezeigt:

4.1.4 SATZ

Sei R eine Randfunktion und $\alpha>-1$.

Es gilt $A_\alpha(R) \subset A_{\alpha+1}(R)$ *dann, wenn*

(*) $\quad R(x)=\beta x \quad$ *mit* $\beta\in\mathbb{R},\ \beta>0$

und höchstens dann, wenn

(**) $\quad \forall \sigma>1:\ x^\sigma = o(R(x)) \quad$ *für* $x\longrightarrow 0+$

Wie man sich sofort klar macht, fallen die Bedingungen (*) und (**) für Standard-Randfunktionen mit $R(x)=O(x)$ für $x\longrightarrow 0+$ zusammen. Dies läßt sich auch direkt aus Satz 3.4.10 herleiten.

Die Vergleichssätze 4.1.2 und 4.1.4 ziehen eine "schöne" Äquivalenzaussage für Abel-Verfahren nach sich. An dieser Stelle tritt die Eleganz des in Definition 1.2.4 gefaßten Limitierungsbegriffs offen zutage. Bei bloßer Betrachtung des zunächst naheliegenden Grenzübergangs $z\longrightarrow 1$, $z\in S(R)$, würden wir Satz 4.1.5 nicht in dieser Weise formulieren können; lediglich eine Art Beinahe-Äquivalenz würde beweisbar sein. Indes, es sei betont, der Gewinn liegt nicht in der Qualität der Aussage an sich, sondern in deren Ästhetik.

4.1.5 SATZ

Für alle $\alpha>-1$ *und alle Stolz'schen Randfunktionen R gilt*

$$A_\alpha(R) \approx A_0(R)$$

Beweis:[1] Stolz'sche Randfunktionen sind von der Form $R(x)=\beta x$ mit einem $\beta\in\mathbb{R}$, $\beta>0$. Daher können wir die Sätze 4.1.2 und 4.1.4 anwenden. Wir haben $A_\alpha \supset A_{[\alpha]+1}$ und $A_{[\alpha]+1} \supset A_{\alpha+1}$ aufgrund von Satz 4.1.2, sowie $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$ nach Satz 4.1.4. Folglich

$$A_{[\alpha]+1} \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset A_{[\alpha]+1}\ ,$$

bzw.

$$A_\alpha \approx A_{[\alpha]+1}.$$

1 Die Schreibweise [ ] ist im folgenden als Gauß'sche Klammer zu deuten.

Abermalige Anwendung von Satz 4.1.2 bringt uns $A_{[\alpha]+1} \subset A_0$. Weiter belegt Satz 4.1.4 die Inklusionskette $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{[\alpha]} \subset A_{[\alpha]+1}$, also $A_0 \subset A_{[\alpha]+1}$. Demnach haben wir auch

$$A_{[\alpha]+1} \approx A_0 \qquad \&$$

In abgeschwächter Form hat der Autor diesen Satz bereits früher bewiesen (s. [16], Satz A.2, S. 128 ff).

Zum Abschluß geben wir noch eine Anwendung des Taubersatzes 3.5.3 .

4.1.6 SATZ

Sei R eine Randfunktion mit $R(x) = O(x)$ *für* $x \longrightarrow 0+$, *ferner* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha,\beta > -1$, $m \in \mathbb{N}$ *und* $\beta \leq \alpha+m$.
Unter der Bedingung

$$(*) \qquad (1-z)^m \, \Phi_\alpha^{(m)}[s_n](z) = o_R(1)$$

folgt aus $s_n \longrightarrow s\,(A_\alpha(R))$ *auch* $s_n \longrightarrow s\,(A_\beta(R))$.

Beweis: Wir setzen $[P;p_n;R]:=A_\alpha(R)$ und $[Q;q_n;R]:=A_{\alpha+m}(R)$. Nun ist ja $P \in F_2^\infty(1-z\,,\alpha+1)$ sowie

$$\begin{aligned} q_n p_n^{-1} &= \binom{n+\alpha+m}{n}\binom{n+\alpha}{n}^{-1} \\ &= \frac{\alpha!\;(n+\alpha+m)!}{(\alpha+m)!\;(n+\alpha)!} \\ &= \frac{\alpha!}{(\alpha+m)!}\cdot(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)\cdots(n+\alpha+m) \end{aligned}$$

Also ist $q_n p_n^{-1}$ ein Polynom in n vom Grade m. Wegen Satz 3.5.3 folgt daher aus $s_n \longrightarrow s\,(A_\alpha(R))$ unmittelbar $s_n \longrightarrow s\,(A_{\alpha+m}(R))$.
Der Rest der Aussage wird durch 4.1.2 belegt. &

Taubersätze für Abel-Verfahren $A_\alpha = A_\alpha(0)$ wurden von BORWEIN und WATSON (s. [10], S. 2, Theorem 1) ausführlich diskutiert. Sie behandeln jedoch eine von 4.1.6 (*) gänzlich verschiedene Tauber-Bedingung und beziehen sich lediglich auf verschwindende Randfunktionen. Desgleichen RAJAGOPAL [29] und JEYARAJAN [23]/[24], die nur an Tauber-Bedingungen bezüglich anderer Verfahren interessiert sind.

Im speziellen Fall m=1 läßt sich der letzte Satz noch in einer schärferen Form aussprechen. Tatsächlich entnehmen wir dem formelmäßigen Zusammenhang 4.1.3 (*) unmittelbar

4.1.7 SATZ

Sei R eine Randfunktion mit $R(x)=O(x)$ *für* $x \longrightarrow 0+$ *und* $\alpha > -1$. *Eine* $A_\alpha(R)$*-limitierbare Folge* (s_n) *ist genau dann* $A_{\alpha+1}(R)$*-limitierbar, wenn*

(*) $$(1-z)\,\Phi'_\alpha[s_n](z) = o_R(1)$$

Beweis: Klar! &

Als Folgesatz erhalten wir die Erweiterung eines Theorems von KUTTNER auf komplexwertige Limitierung (s. [26], Theorem A, S. 219).

4.1.8 KOROLLAR

Es gilt

$$A_\alpha(R)-\lim s_n = s \implies A_{\alpha+1}(R)-\lim s_n = s$$

genau dann, wenn $A_\alpha(R)-\lim n\,\Delta s_n = 0$.[1]

Beweis: Die Übertragung der in [26] gegebenen Argumentation bereitet keinerlei Schwierigkeiten. Ausgangspunkt ist Lemma 4.1.3. Nach einigen elementaren Umformungen findet man

$$(1-z)\,\Phi'_\alpha[s_n](z) = (\alpha+1)\,(1-z)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha+1}{n} (s_{n+1}-s_n)\, z^n$$

[1] Mit Δs_n meinen wir die Differenz $s_n - s_{n-1}$.

- 119 -

$$= (\alpha+1)(1-z)^{\alpha+1} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n-1} (s_n - s_{n-1}) z^{n-1}$$

$$= (1-z)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} n \Delta s_n z^{n-1}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \Phi_\alpha[n \Delta s_n](z)$$

Nun genügt der Hinweis auf 4.1.7 (*), um alles zu zeigen. &

4.2 Logarithmische Verfahren

Neben den Abel-Verfahren ist auch das logarithmische Verfahren L von größerem Interesse. In gewisser Weise kann man dieses Verfahren als Grenzfall der Abel-Verfahren A_α für $\alpha=-1$ auffassen (s. [6], (Abschnitt) 5, S. 347 f). Dennoch verhält es sich in mancherlei Beziehung gänzlich anders als jene. Vom Standpunkt der allgemeinen Theorie aus gesehen sind die Unterschiede vor allem dadurch begründet, daß gilt $L \in F_3^\infty$ und $A_\alpha \in F_2^\infty$ aber $L \notin F_2^\infty$ und $A_\alpha \notin F_3^\infty$ (s. hierzu die folgende Bemerkung 4.2.2).

Einige der Haupteigenschaften des logarithmischen Verfahrens wurden bereits von BORWEIN [9] betrachtet. ISHIGURO [22] vergleicht L mit einem verwandten zeilenfiniten Matrixverfahren. Aussagen im Zusammenhang mit nicht-entarteten Randfunktionen sind indessen nicht belegt.

4.2.1 DEFINITION

Sei R eine Randfunktion. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\alpha \notin \mathbb{N}$ definieren wir

$$p_n := \frac{1}{n+\alpha+1}$$

$$P(z) := -z^{-1} \log(1-z)$$

und bezeichnen $[P;p_n;R]$ kurz als logarithmisches Verfahren $L_\alpha(R)$.

Als Definitionsgebiet des Logarithmus $\log(1-z)$ legen wir hierbei stets die längs $[1,\infty[$ geschlitzte, unendliche komplexe Ebene zugrunde.

Nach dieser Vereinbarung ist ein Potenzreihenverfahren L_α für $\alpha \neq 0$ sicher nicht normiert. Für $\alpha=0$ und $R\equiv 0$ haben wir das bekannte — normierte — logarithmische Verfahren $L=L_0(0)$.

4.2.2 BEMERKUNG

Wie man leicht zeigt ist $L_\alpha \in F_3^\infty$. Zum Nachweis berechnen wir die Ableitungen von P im Sinne der letzten Definition:

$$
\begin{aligned}
P^{(n)}(z) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z^{-1})^{(k)} (-\log(1-z))^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (z^{-1})^{(k)} \left[(1-z)^{-1}\right]^{(n-k-1)} + (z^{-1})^{(n)} (-\log(1-z)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k\, k!\, (n-k-1)}{z^{k+1}(1-z)^{n-k}} - (-1)^n\, n!\, \frac{\log(1-z)}{z^{n+1}} \\
&= \frac{(n-1)!}{z(1-z)^n} \left(1+o_R(1)\right)
\end{aligned}
$$

Folglich erhalten wir für $n \geq 1$

$$
\frac{P^{(n)}(z)}{P(z)} = (1-z)^{-n} \left(\frac{-1}{\log(1-z)}\right)\left((n-1)! + o_R(1)\right)
$$

also $P \in F_3^\infty \left(1-z,\ -(\log(1-z))^{-1},\ ((k-1)!)_{k\geq 1}\right)$.

Infolgedessen können wir prinzipiell sowohl auf Vergleichssatz 3.4.4 als auch auf Tauber-Satz 3.5.2 zurückgreifen.

Wegen $h=O_R(1-z)$ für jede Randabstandsfunktion h einer Randfunktion R, ist die Bedingung 3.4.4 (*) allerdings nicht erfüllbar, denn dies erfordert $(1-z)^m = O_R\left(h^m (\log(1-z))^{-1}\right)$, also $1-z = o_R(h)$. Damit haben wir einen Widerspruch.

Als erstes werden wir nun zeigen, für welche Randfunktionen R ein logarithmisches Verfahren $L_0(R)$ permanent ist. Wie wir später sehen werden, gilt diese Permanenzaussage dann für alle L_α, $\alpha > -1$. In der Literatur wird dieses Problem nicht diskutiert.

Zum Beweis benötigen wir einen Hilfssatz vom Typ 3.1.4 .

4.2.3 LEMMA

Seien R und R_0 zwei Randfunktionen. Es gelte $R_0(x) := \sqrt{2x}$. Die Bedingung $R \lesssim R_0$ ist notwendig und hinreichend für

(1) $$\frac{\log(1-|z|)}{\log(1-z)} = O_R(1)$$

Beweis: Wir zeigen zuerst den hinreichenden Teil der Behauptung für $R = R_0$. Mit $i = \sqrt{-1}$ sei $x+iy = 1-z$ sowie $y = t\,R(x) = t\sqrt{2x}$, $0<t<1$, t zunächst fest. Es folgt

$$\begin{aligned} 1-|z| &= 1-(1-x)\sqrt{1+\frac{y^2}{(1-x)^2}} \\ &= 1-(1-x)\sqrt{1+2t^2x(1+o(1))} \\ &= 1-(1-x)\left(1+t^2x+o(x)\right) \\ &= x(1-t^2)(1+o(1)) \end{aligned}$$

für $x \longrightarrow 0+$, mithin

(2) $$\log(1-|z|) = \log x + \log(1-t^2) + o(1)$$

Somit haben wir

$$|1-z| = \sqrt{x^2+2t^2x}$$
$$= t\sqrt{2x}\,(1+o(1))$$

also

(3) $$\log|1-z| = \frac{1}{2}\log x + \log t\sqrt{2} + o(1)$$

Aus (2) und (3) folgern wir

(4) $$\frac{\log(1-|z|)}{\log|1-z|} = 2+o(1) \quad \text{für } x \longrightarrow 0+$$

Wir wählen nun ein $\delta>0$. Offensichtlich existiert eine Konstante $K\geq 1$ die für alle $x>1-\delta$ (mit Sicherheit also $z\in S_\delta(R)$) den Ausdruck (4) nach oben hin begrenzt. Wegen $y=tR_0(x)$ gibt es zu jedem $\zeta\in S_\delta(R)$ ein $r\in[-1,1]$ und ein $z\in S_\delta(R)$, so daß $1-\zeta=x+itry$. Wir bekommen demnach $|\zeta|\leq|z|$ und $|1-\zeta|\leq|1-z|$. Weiter können wir schließen $|\log(1-|\zeta|)|\leq|\log(1-|z|)|$ sowie $|\log|1-\zeta||\geq|\log|1-z||$. Folglich werden wir auf

(5) $$\frac{|\log(1-|\zeta|)|}{|\log|1-\zeta||} \leq \frac{|\log(1-|z|)|}{|\log|1-z||} \leq K$$

Wenn wir nun noch $|\log(1-\zeta)|\geq|\log|1-\zeta||$ berücksichtigen, so ergibt sich aus (5), nach Umbenennung von ζ in z

(6) $$\left|\frac{\log(1-|z|)}{\log(1-z)}\right| \leq K$$

für alle $z\in S_\delta(tR)$. Insbesondere ist (6) für alle $z\in S_\delta(t'R)$ richtig, wenn nur $0\leq t'\leq t$. Insofern haben wir auch den oben ausgeschlossenen Fall $t=0$ behandelt.

Da wir t beliebig nahe an 1 wählen können ist (1) für $R=R_0$ evident. Die Gültigkeit von (1) für $R\lesssim R_0$ ist nunmehr eine Folge von Lemma 2.1.10.

Zum Nachweis der Notwendigkeit nehmen wir an $R\not\lesssim R_0$ (s. Bemerkung 2.1.9). Dann gibt es ein $t<1$ und für alle $t_0<1$ und $\delta>0$ ein $x<\delta$, $x>0$, so daß $tR(x) > t_0 R_0(x)$. Wir setzen $y := R(x)$ und wählen speziell ein $t_0 > t$. Es folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{t_0}y\right)^2 &> 2x \\ &> 2x\left(1-\frac{x}{2}\right) \\ &= 1-(1-x)^2\end{aligned}$$

Mit $z := 1-x+itt_0^{-1}y$ gilt also $|z|>1$, daher enthält $S_\delta(tt_0^{-1}R)$ für jedes $\delta>0$ einen Punkt z außerhalb des Einheitskreises. Hieraus folgt sofort

$$\forall\delta>0:\ \exists z_0 \in S_\delta(tt_0^{-1}R):\ |z_0|=1$$

Nun ist aber $\log(1-|z|)$ in jeder Umgebung eines solchen Punktes z_0 unbeschränkt. Ferner haben wir für alle fraglichen Punkte $|\log(1-z_0)| < \infty$. Demzufolge ist die linke Seite von (1) für $z \longrightarrow z_0$ nicht beschränkt, d.h. aber, (1) ist mit Sicherheit nicht richtig. Damit sind wir fertig. &

4.2.4 SATZ

Das logarithmische Verfahren $L = L(R)$ ist permanent genau dann, wenn $R \lesssim R_0$ (mit $R_0(x) := \sqrt{2x}$).

Beweis: Wir haben $L(R) = [P;p_n;R]$ mit $P(z) = -z^{-1}\log(1-z)$. Notwendig und hinreichend für die Permanenz von $L(R)$ sind die beiden Bedingungen

(P1) $$\frac{1}{P(z)} = o_R(1)$$

(P2) $$\frac{P(|z|)}{P(z)} = O_R(1)$$

Nach Definition von P und Lemma 4.2.3 ist (P2) äquivalent mit $R \lesssim R_0$. Da (P1) trivialerweise für alle interessierenden Randfunktionen zutrifft, sind wir bereits am Ende. &

4.2.5 BEMERKUNG

Im letzten Satz kann die Randfunktion R_o natürlich durch jede zu ihr äquivalente[1] Randfunktion ersetzt werden. In diesem Sinne betrachten wir die Randfunktion

$$R_1(x) := \sqrt{1-(1-x)^2}$$

Nach unserer Definition des Grenzübergangs wird sofort klar, daß $z \longrightarrow 1,\ z \in S(R_1)$ nichts anderes bedeutet als $z \longrightarrow 1,\ z \in E$ (offene Einheitskreisscheibe).

Wie man leicht nachprüft, gilt wegen $R_1(x) = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1-x/2}$ die Äquivalenz $R_1 \approx R_o$ (vgl. Definition 2.1.8). Dies führt uns zu einer geometrischen Sicht der Aussage von Satz 4.2.4. Um das wesentliche noch deutlicher hervorzuheben, verzichten wir auf limitierungstheoretische Termini und formulieren folgendermaßen:

> Die Folge (s_n) konvergiere gegen ein $s \in \mathbb{C}$.
> Der Ausdruck
>
> $$(*) \qquad \frac{-1}{\log(1-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n z^n}{n+1}$$
>
> konvergiert für $z \longrightarrow 1$ gegen s, wenn z innerhalb eines durch $x^2+y^2/b^2=1$, $|b|<1$, $x>x_o$ ($0<x_o<1$ fest) bestimmten Ellipsensegments gegen 1 strebt. Andernfalls konvergiert (*) im allgemeinen nicht

In der Tat ist diese Deutung eine direkte Konsequenz aus obiger Bemerkung und unserer Definition des Grenzübergangs. Für alle $t \in]0,1[$ ist nämlich der Graph von tR_1 wegen

$$t^2\,[R_1(x)]^2 + (1-x)^2 = 1$$

ein Ellipsenbogen und demnach $S_\delta(tR_1)$ für alle $\delta > 0$ ein Ellipsensegment mit Scheitel in $z=1$.

Wenn wir uns bei der vorgestellten Schlußweise auf R_o anstelle von R_1 beziehen, so werden wir völlig analog auf eine "Parabelsegmentbedingung" geführt. Der relevante Teilsatz lautet dann:

1 Zur Definition vgl. 2.1.8 .

... wenn z innerhalb eines durch $y^2 = 2b(1-x)$, $|b|<1$, $x>x_0$ bestimmten Parabelsegments gegen 1 strebt.

Wir untersuchen jetzt die Beziehung zwischen den logarithmischen- und den Abel-Verfahren.

4.2.6 SATZ

Sei $\alpha>-1$ und R eine Randfunktion mit $R \lesssim R_0(x) := \sqrt{2x}$. Es gilt

$$L_\alpha(R) \supset A_\alpha(R)$$

Beweis: Mit $d\chi(t) := (1-t)^\alpha\, dt$ bekommen wir für alle $n\geq 0$

$$\binom{n+\alpha}{n} \int_0^1 t^n\, d\chi(t) = \binom{n+\alpha}{n} \binom{n+\alpha-1}{n}^{-1} (\alpha+1)^{-1}$$

$$= (n+\alpha+1)^{-1}$$

Wenn wir weiter $[P;p_n] := A_\alpha$ und $[Q;q_n] := L_\alpha$ sowie $\mu_n = \int_0^1 t^n\, d\chi(t)$ setzen, so haben wir offensichlich $p_n = \mu_n q_n$. Aufgrund von Lemma 4.2.3 gilt $-\log(1-|z|) = O(|\log(1-z)|)$, also $Q(|z|) = O(|Q(z)|)$ für $z \longrightarrow 1$, $z\in S(R)$. Des weiteren bemerken wir $d\chi(t)\geq 0$ für $0\leq t\leq 1$. Daher können wir Lemma 3.1.3 auf P und Q anwenden und erhalten

$$\int_0^1 \frac{|1-t|^\alpha}{|1-tz|^{\alpha+1}}\, dt = \int_0^1 |P(tz)|\, |d\chi(t)|$$

$$= O(|Q(z)|$$

$$= O(|\log(1-z)|)$$

für $z \longrightarrow 1$, $z\in S(R)$. Mit Satz 3.1.2 folgt hieraus sofort die Behauptung. &

Für $R\equiv 0$ bekam BORWEIN (s. [6], S. 347 f) das etwas stärkere Resultat

$L_0(R) \supset A_\alpha(R)$ für alle $\alpha > -1$. Die Erweiterung dieser Aussage auf nicht-verschwindende Randfunktionen erschließen wir uns mit Hilfe eines Äquivalenzsatzes für die Verfahren L_α. Vorbereitend beweisen wir ein Lemma.

4.2.7 LEMMA

Seien $\alpha, \beta > -1$ *und* R *eine Randfunktion* $\lesssim R_0(x) := \sqrt{2x}$. *Es gilt*

$$s_n \longrightarrow s\left(L_\alpha(R)\right) \implies \frac{s_n}{n+\beta+1} \longrightarrow 0 \left(L_\alpha(R)\right)$$

Beweis: BORWEIN (s. [9], Lemma 1, S. 213) hat einen entsprechenden Hilfssatz für Randfunktionen $R \equiv 0$ und das Verfahren $L = L_0$ bewiesen. Die Übertragung seiner Beweismethode zur Verifikation unserer Behauptung geht ohne Schwierigkeiten vonstatten. Zur Motivierung der an die Randfunktion R gestellten Bedingung ist indessen noch einiges zu bemerken. Nach Bemerkung 4.2.5 ist die dort definierte Randfunktion R_1 äquivalent zu R_0. Andererseits besagt der Grenzübergang $z \longrightarrow 1$, $z \in S(R_1)$ ja nichts anderes als $z \longrightarrow 1$, $z \in E$. Nun ist aber $|z| < 1$ eine natürliche Voraussetzung an die Anwendbarkeit des BORWEIN'schen Beweisgedankens, das Auftreten einer Zusatzbedingung an R ist damit hinreichend begründet. Die Details zur Durchführung des Beweises bleiben dem Leser überlassen.
Mit Blick auf Satz 3.1.6 eröffnet sich eine zweite Beweismethode. Man setzt $[P;p_n;R] := L_\alpha(R)$ und weist nach, daß die Bedingungen 3.1.6 (i) und (ii) erfüllt sind. Besondere Probleme treten auch bei diesem Verfahren nicht auf. &

Wir wenden uns jetzt dem angesprochenen Äquivalenzsatz zu.

4.2.8 SATZ

Für alle Randfunktionen $R \lesssim \sqrt{2x}$ *und* $\alpha > -1$ *gilt* $L_\alpha(R) \approx L_0(R)$.

Beweis: Sei (s_n) eine $L_\alpha(R)$-limitierbare Folge mit Grenzwert s. Die Potenzreihen

$$\lambda_\beta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n z^{n+1}}{n+\beta+1}, \quad \beta > -1$$

sind dann in einer Umgebung des Nullpunktes sämtlich holomorph. Daher dürfen wir die Differenz

$$\lambda_0(z) - \lambda_\alpha(z) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n z^n}{(n+1)(n+\alpha+1)}$$

bilden. Unter Hinweis auf Lemma 4.2.7 können wir aus $L_\alpha(R)\text{-}\lim s_n = s$ auf $L_\alpha(R)\text{-}\lim s_n(n+1)^{-1} = 0$ schließen. Demnach gilt auch

$$\frac{-\alpha}{\log(1-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n z^n}{(n+1)(n+\alpha+1)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } z \longrightarrow 1,\ z \in S(R)$$

also $L_0(R)\text{-}\lim s_n = s$. Die umgekehrte Inklusion beweist man völlig analog. &

Als Folgesatz bekommen wir nun eine echte Erweiterung der Ergebnisse BORWEIN's (vgl. [6], S. 347 f).

4.2.9 KOROLLAR

Für alle $\alpha > -1$, $R \lesssim R_0(x) := \sqrt{2x}$, *gilt* $L_0(R) \supset A_\alpha(R)$.

Beweis: Nach den Sätzen 4.2.6 und 4.2.8 haben wir $L_0(R) \approx L_\alpha(R) \supset A_\alpha(R)$. &

Eine weitere Konsequenz des Äquivalenzsatzes ist die folgende Aussage zur Translativität der logarithmischen Verfahren. Für verschwindende Randfunktionen geht dieser Satz auf BORWEIN [9] zurück.

4.2.10 SATZ (Für R≡0 vgl. BORWEIN [9], Theorem 1, S. 213)

Die logarithmischen Verfahren $L_\alpha(R)$, $R \lesssim \sqrt{2x}$, $\alpha > -1$, *sind translativ.*

Beweis: Die Beweismethode BORWEIN's (Das hieße in unserem Falle, Lemma 4.2.7 anwenden) ließe sich auch hier problemlos übertragen.

Wir wollen jedoch aus der Äquivalenz $L_\alpha \approx L_0$ Nutzen ziehen und wenden deshalb das zitierte Verfahren nur indirekt an.

Sei also (s_n) $L_0(R)$-limitierbar zum Wert s. Mit $s_{-1} := 0$ folgt

$$(1) \qquad \frac{-1}{\log(1-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{n-1}}{n+1} z^{n+1} = \frac{-1}{\log(1-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1+1} z^{n+1}$$

Nach Satz 4.2.8 ist $L_1(R)$-$\lim s_n = s$, wegen (1) also auch $L_0(R)$-$\lim s_{n-1} = s$. Weiterhin haben wir

$$\frac{-1}{\log(1-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{n+1}}{n+2} z^{n+1} = \frac{-1}{z\log(1-z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} z^{n+1}$$

$$= \frac{-1}{z\log(1-z)} \left\{ -s_0 z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} z^{n+1} \right\}$$

und demnach L_0 (R)-$\lim s_{n+1} = s$. Vermöge Satz 4.2.8 haben wir alles gezeigt. &

Wir kommen nun wieder auf die Eigenschaft $L(R) \in F_3^\infty$ zurück und geben eine Anwendung von Satz 3.4.4 .

4.2.11 SATZ

Sei R eine Randfunktion mit $R(x) = O(x)$ *für* $x \longrightarrow 0+$.
Es gibt eine $L(R)$*-limitierbare Folge, die für kein* $\alpha \geq 0$ $A_\alpha(R)$*-limitierbar ist, d.h., es gilt* $L(R) \not\subset A_\alpha(R)$.

Beweis: Sei $[P;p_n] := L$ und $[Q;q_n] := A_0$. Wir haben $p_n = (n+1)^{-1}$ und $q_n = 1$ für alle $n \geq 0$. Daher ist die Quotientenfolge (q_n/p_n) eine PE-Folge vom Grade 1. Nach Bemerkung 4.2.2 ist $L \in F_3^1(T, S, (1))$ mit $T(z) = 1-z$ und $S(z) = -1/\log(1-z)$. Daher sind die Voraussetzungen zur Anwendung von Satz 3.4.4 gegeben. Die Aussage (ii) jenes Satzes liefert uns $[P] \not\subset [Q]$. Wegen $A_0(R) \supset A_\alpha(R)$ aufgrund von Satz 4.1.2 sind wir fertig. &

Bezüglich Stolz'scher Randfunktionen gestattet Satz 4.1.5 eine triviale

Verallgemeinerung. Dann gilt nämlich wegen $A_0(R) \approx A_\alpha(R)$ für alle $\alpha > -1$ auch $L(R) \not\subset A_\alpha(R)$ für alle $\alpha > -1$. In der Literatur ist eine Satz 4.2.11 vergleichbare Aussage lediglich für Randfunktionen $R \equiv 0$ belegt (vgl. [9], Theorem 3, S. 215].

Bevor wir nun zu einer Konkretisierung des Taubersatzes 3.5.2 kommen, notieren wir noch eine interessante Beziehung zwischen L_0 und A_0 .

4.2.12 LEMMA

Sei $\alpha > -1$, R eine Randfunktion und (s_n) irgendeine $L_0(R)$-limitierbare Folge. Mit

$$\Lambda[s_n](z) := \frac{-1}{\log(1-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} z^{n+1}$$

gilt

$$(*) \qquad \Phi_0[s_n](z) = -(1-z)\log(1-z)\,\Lambda'[s_n](z) + \Lambda[s_n](z)$$

Der Nachweis wird durch einfaches Ausrechnen erbracht. Die in Rede stehende Relation ist vom gleichen Typ wie 4.1.3 (*). Wie dort realisiert, ließe sich auch 4.2.12 (*) mit den Methoden von Abschnitt 3.2 ganz systematisch ableiten. Das selbe trifft auf eine Fülle weiterer Beziehungen höherer Ordnung, z.B. zwischen $\Lambda[s_n]$ und $\Phi_\alpha[s_n]$, $\alpha \in \mathbb{N}$, zu. Indes, für theoretische Untersuchungen sind diese Relationen von untergeordneter Bedeutung. In den meisten Fällen genügt bereits die Kenntnis der exakten Größenordnung der relevanten Faktoren f_k im Sinne von 3.2.8 (2). Diese Thematik haben wir in Abschnitt 3.4 ausführlich diskutiert.

Folgerichtig greifen wir zum Beweis des nachstehenden Taubersatzes nicht auf Lemma 4.2.12 zurück, sondern beziehen uns — indirekt — auf Lemma 3.4.2 . In einer sich anschließenden, spezielleren Anwendung kommen wir dann noch einmal auf 4.2.12 (*) zu sprechen.

Nach Bemerkung 4.2.2 ist das logarithmische Verfahren L_0 aus der Familie F_3^∞, genauer, $L_0 \in F_3^\infty\left(1-z,\ -(\log(1-z))^{-1},((k-1)!)_{k\geq 1}\right)$. Die Voraussetzungen von Satz 3.5.2 sind für $[P;p_n;R]:=L_0(R)$ und $[Q;q_n;R]:=A_m(R)$, $m \in \mathbb{N}$, erfüllt. Es gilt ja

$$q_n p_n^{-1} = (n+1)\binom{n+m}{n}$$

$$= (m!)^{-1}\,(n+1)\cdot(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)$$

d.h., (q_n/p_n) ist eine PE-Folge vom Grade m+1.
Demnach haben wir bewiesen

4.2.13 SATZ

Sei R eine Randfunktion mit $R(x) = O(x)$ *für* $x \longrightarrow 0+$ *und* $m \in \mathbb{N}$. *Eine* $L(R)$*-limitierbare Folge* (s_n) *ist dann, vorausgesetzt es gilt*

(*) $$(1-z)^{m+1} \log(1-z)\, \Lambda^{(m+1)}[s_n](z) = o_R(1)\ ,$$

auch $A_m(R)$*-limitierbar.*

Mit Blick auf Lemma 4.2.12 können wir diesen Taubersatz für m=0 in einer schärferen Form aussprechen.

4.2.14 SATZ

Sei R eine Randfunktion mit $R(x) = O(x)$ *für* $x \longrightarrow 0+$. *Eine* $L(R)$*-limitierbare Folge* (s_n) *ist genau dann* $A_0(R)$*-limitierbar, wenn*

(*) $$(1-z) \log(1-z)\, \Lambda'[s_n](z) = o_R(1)$$

BORWEIN **und** WATSON **(s. [11], Theorem 1, S. 12 ff) haben einen allgemeinen Taubersatz zwischen $L(R)$ und $A_\alpha(R)$ für $\alpha > -1$ und $R \equiv 0$ bewiesen. Die verwendete Tauber-Bedingung ist indessen mit 4.2.13/14 (*) nur insofern vergleichbar, als daß sie in beiden Fällen eher "funktionalen" Charakter hat.**

4.3 Die Beziehung zwischen Gronwall- und Abel-Verfahren.

Wir geben eine kurze Definition der Gronwall-Limitierbarkeit. Synonym sprechen wir auch von (f,g)-Limitierung.

4.3.1 BEMERKUNG

Sei f eine auf $\overline{E}-\{1\}$ biholomorphe Funktion mit $f(0)=0$, $f(1)=1$ und $f(E)\subset E$ die ferner der Bedingung

$$(*) \qquad \exists\lambda\geq 1\colon\ \Psi(w) := \frac{1-f(w)}{(1-w)^{1/\lambda}} \quad \text{ist stetig in 1 und } \Psi(1)>0$$

genügt. Weiter sei g eine zweite Funktion mit $g(w)=\gamma(w)\,(1-z)^{-\alpha}$, $\alpha>0$, γ holomorph auf $\overline{E}-\{1\}$, stetig in 1 und $\neq 0$ für alle $w\in E\cup\{1\}$. Die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von g im Nullpunkt bezeichnen wir mit b_n und verlangen speziell $b_n\neq 0$ für alle $n\geq 0$.

Eine vorgegebene Folge (s_n) transformieren wir, $z=f(w)$ gesetzt, über die Identität

$$(**) \qquad (1-z)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu \equiv \frac{1}{g(w)}\sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n$$

in eine Folge (U_n) und nennen (s_n) kurz (f,g)-limitierbar zum Wert s, wenn die Folge (U_n) für $n\longrightarrow\infty$ ihrerseits gegen s konvergiert.

Substantiell geht diese Definition auf GRONWALL [18] zurück. Es sei ferner auf AMERIO [1], BIRINDELLI [12] und BUSTOZ - WRIGHT [14] verwiesen. Die hier wiedergegebene Variante wird bei FISCHER [16] eingehend diskutiert.

Wir formulieren nun zunächst die beiden Hauptsätze über Gronwall-Verfahren im Sinne der entwickelten Systematik für komplexwertige Abel-Verfahren. Wie man sich anhand der in [16] (s. 1.1.14, S. 8 f, 2.1.1, S. 24 f und 2.1.3, S. 26 ff) verwendeten Notation leicht klarmacht, sind die Sätze 4.3.2

und 4.3.3 in der Tat lediglich "Übersetzungen" der entsprechenden Sätze 2.1.1 und 2.1.3 aus [16]. Daher können wir auf die Beweise verzichten.

4.3.2 SATZ (GRONWALL)

Die Folge (s_n) *sei* (f,g) *-limitierbar zum Wert s. Dann ist* $\Phi_0[s_n](z)$ *holomorph in* $f(E)$ *und es gilt* $s_n \longrightarrow s\ (A_0(\beta x))$ *für jedes* β *mit* $0 \leq \beta \leq \tan \pi/2\lambda$, $\beta < \infty$.

4.3.3 SATZ (GRONWALL, BIRINDELLI, BUSTOZ - WRIGHT)

Sei $\beta > \tan \pi/2\lambda$. *Für eine vorgegebene Folge* (s_n) *sei* $\Phi_0[s_n]$ *holomorph auf* $f(\overline{E})-\{1\}$ *und es gelte* $s_n \longrightarrow s\ (A_0(\beta x))$. *Dann ist* (s_n) *zum selben Grenzwert* (f,g)*-limitierbar.*

Hinsichtlich Satz 4.3.2 konnte BUSTOZ (s. [13], Theorem 1, S. 785 ff) eine Erweiterung beweisen. Doch gelang dies nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen an die zugrundeliegende Funktion f. Wir gehen einen anderen Weg und greifen zum Beweis des BUSTOZ'schen Satzes auf Satz 4.1.5 zurück, daher kommen wir ohne jegliche Zusatzannahmen aus.

4.3.4 KOROLLAR

Für alle $\alpha > -1$, $0 \leq \beta \leq \tan \pi/2\lambda$, $\beta < \infty$ *gilt*

$$s_n \longrightarrow s\ (f,g) \quad \Longrightarrow \quad s_n \longrightarrow s\ (A_\alpha(\beta x)).$$

Beweis: Nach Satz 4.1.5 gilt $A_\alpha(\beta x) \approx A_0(\beta x)$. Der Hinweis auf Satz 4.3.2 genügt nun, um alles zu zeigen. &

Formal betrachtet, haben wir also eine Verschärfung des oben zitierten Theorems 1 aus [13] erhalten. Indes, Die Äquivalenzaussage 4.1.5 entlarvt den genannten Satz als triviale Konsequenz aus 4.3.2. Man beachte dennoch die Einfachheit des gegebenen Beweises im Vergleich zur Darstellung in [13]. Für ganzzahlige α **siehe auch FISCHER [16] (Abschnitt 3.4, S. 77 ff, insbesondere Satz 3.4.3).**

Wir behandeln nun noch eine Aussage zum Produkt — genauer, zur Hintereinanderschaltung — von Abel- und Gronwall-Verfahren. Verwandte Sätze gehen ursprünglich auf SZASZ [31] — $A_0 \subset A_0 C_k$ (Cesaro-Verfahren) — und AMIR [2] — $A_\alpha \subset A_\alpha H_\chi$ (Hausdorff-Mittel) — zurück. Komplexwertige Abel-Verfahren und (f,g)-Verfahren betrachtet dagegen als erster BUSTOZ (s. [13], Theorem 2, S. 789 ff). Für jeweils eingeschränkte Klassen von Abel- und Gronwall-Verfahren beweist er $A_\alpha(x \tan \Theta) \subset A_\alpha(x \tan \Theta)\,(f,g)$ wobei $0 \le \Theta < \pi/2$. Wir werden nachweisen, daß diese Behauptung in einem allgemeineren Sinne Gültigkeit hat. Das entscheidende Beweishilfsmittel ist wieder die Äquivalenz $A_\alpha(R) \approx A_0(R)$ für Stolz'sche Randfunktionen R (Satz 4.1.5). Darüber hinaus benötigen wir noch das folgende Lemma.

4.3.5 LEMMA

Sei f eine Funktion die 4.3.1 (*) genügt, ferner R eine Stolz'sche Randfunktion, etwa $R(x) = \beta x$ *mit* $0<\beta<\infty$, *und*

$$R_f(x) = x \tan (\lambda^{-1} \arctan \beta) \qquad [\lambda \textit{ wie in } 4.3.1\,].$$

Für alle $t \in [0,1[$, $\rho>0$, *gibt es dann ein* $\tau \in [0,1[$ *und ein* $r>0$, *so daß*

$$f(S_r(tR)) \subset S_\rho(\tau R_f)$$

Beweis: Nach 4.3.1 (*) haben wir für $w \in \overline{E}-\{1\}$

$$(1) \qquad 1-f(w) = (1-w)^{1/\lambda}\, \Psi(w)$$

mit $a := \Psi(1) > 0$. Wir setzen $z=f(w)$, wählen ein $t \in [0,1[$ sowie ein $\rho>0$ und vereinbaren $\Theta := \Theta(w) := \arg(1-w)$ für alle $w \in \overline{E}-\{1\}$. Es folgt

$$(2) \qquad 1-z = |1-w|^{1/\lambda}\, e^{i\Theta(w)/\lambda}\,(a + o(1))$$

für $w \longrightarrow 1$, $w \in E$, und daher auch

$$(3) \qquad |\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Re}(1-z)|\; |\tan(\Theta(w)/\lambda)|\; (1+o(1))$$

für $w \longrightarrow 1$, $w \in E$.

Nun gibt es ein $r'>0$, so daß die Abschätzung in (3) — genauer, der Term $o(1)$ — für $|1-w|<r'$ betragsmäßig kleiner als der positive Wert

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\tan((\arctan\beta)/\lambda)}{\tan((\arctan(t\beta))/\lambda)}-1\right]=:(B-1)/2$$

bleibt. Ferner existiert nach (2) ein $r''>0$ mit

$$|1-z| \le |1-w|^{1/\lambda}\cdot 2a$$

für $|1-w|<r''$. An dieser Stelle nehmen wir irgendein positives

$$r < \min\left(r', r'', (\rho/2a)^{\lambda}\right) \Big/ \sqrt{1+t^2\beta^2}$$

und fixieren ein $w\in S_r(tR)$.
Sodann folgt $0<1-\mathrm{Re}(w)\le r$ sowie $|\mathrm{Im}(w)|\le t\beta\,|1-\mathrm{Re}(w)|$, also auch $|1-w|^2\le r^2(1+t^2\beta^2)$. Damit schließen wir

$$\begin{aligned} 0 < 1-\mathrm{Re}(w) &\le |1-z| \\ &\le |1-w|^{1/\lambda}\cdot 2a \\ &\le r^{1/\lambda}\cdot\left(1+t^2\beta^2\right)^{1/2\lambda}\cdot 2a \\ &\le \rho \end{aligned}$$

und weiter, $\tau=(1+1/B)/2$ gesetzt,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}(z)| &\le |1-\mathrm{Re}(z)|\,\tan(\Theta/\lambda)\cdot(1+(B-1)/2) \\ &\le |1-\mathrm{Re}(z)|\,\tan((\arctan(t\beta))/\lambda)\cdot\tau B \\ &= \tau\,|1-\mathrm{Re}(z)|\,\tan((\arctan\beta)/\lambda) \\ &= |\tau R_f(1-\mathrm{Re}(z))| \end{aligned}$$

Daher haben wir $z=f(w)\in S_\rho(\tau R)$ mit einem $\tau\in[0,1[$. &

4.3.6 SATZ

Sei (f,g) ein Gronwall-Verfahren mit $g(z)=(1-z)^{-\sigma}$ *für ein* $\sigma>0$. *Weiter seien* $\alpha,\delta>-1$ *und* $0<\beta<\infty$. *Für alle Stolz'schen Randfunktionen* $R(x)\geq x\tan((\arctan\beta)/\lambda)$ *gilt dann*

$$A_\alpha(R)\subset A_\delta(\beta x)\circ(f,g)$$

Beweis: Wegen Satz 4.1.5 dürfen wir uns auf $\alpha=\delta=0$ beschränken. Wir setzen $R_f(x):=x\tan((\arctan\beta)/\lambda)$. Offensichtlich gilt für alle $R\geq R_f$ die Einschließung $A_0(R)\subset A_0(R_f)$, daher genügt es, die Behauptung für $R=R_f$ zu beweisen.

Sei also (s_n) eine Folge mit $s_n\longrightarrow s\ (A_0(R))$. O.B.d.A. gelte $s=0$, dann ist $\Phi_0[s_n](z)=o_R(1)$ bzw. $\Phi_0[s_n](z)=o(1)$ für $z\longrightarrow1$, $z\in S(\tau R)$, $0\leq\tau<1$. Nach Lemma 4.3.4 existiert zu jedem $t\in[0,1]$ und jedem $\rho>0$ ein $\tau\in[0,1[$ und ein $r>0$, so daß $f(S_r(t\beta x))\subset S_\rho(\tau R)$. Mithin gilt $\Phi_0[s_n](f(w))=o(1)$ für $w\longrightarrow1$, $w\in S(t\beta x)$, $0\leq t<1$. Aufgrund von Definition 4.1.1 (**) heißt dies für die (f,g)-Transformierte (U_n) schlicht $\Phi_{\sigma-1}[U_n](w)=o_{R'}(1)$, also $A_{\sigma-1}(R')\text{-}\lim U_n=0$, wobei $R'(x):=\beta x$. Nun setzt wieder Satz 4.1.5 ein und belegt den Schluß auf $A_0(R')\text{-}\lim U_n=0$. Damit haben wir die Behauptung verifiziert. &

Man sieht sofort ein, daß in der Situation von Satz 4.3.6 insbesondere $A_\alpha(\beta x)\subset A_\alpha(\beta x)\circ(f,g)$ gilt.

Obgleich wir eine Aussage bewiesen haben, die deutlich über das in [13] formulierte Theorem 2 (Zitat s. oben) hinausreicht, konnten wir einen kürzeren Beweis liefern.

LITERATURVERZEICHNIS

1. AMERIO, L.: **Sulle condizioni di validità dei metodi di sommazione di Gronwall.**
Ann. mat. pura appl., Bologna, (4) 18 (1939), 239–260

2. AMIR (JAKIMOVSKI), A.: **Some relations between the methods of summability of Abel, Borel, Cesaro, Hölder und Hausdorff.**
J. Analyse Math. 3 (1954), 346–381

3. BIRKHOLC, A.: **On generalized power methods of limitation.**
Bull. Acad. Plon. Sci; Ser. Sci. math. astron. phys. 13 (1965) 323–327

4. BIRKHOLC, A.: **On the problem of perfectness of the power methods of limitation.**
Bull. Acad. Polon. Sci; Ser. Sci. math. astron. phys. 14 (1966), 385-388

5. BIRKHOLC, A.: **On generalized power methods of limitation.**
Studia Mathematika, 28 (1966), 213-245

6. BORWEIN, D.: **On methods of summability based on power series.**
Proc. royal Soc. Edinburgh, Sect. A 64 (1959), 342-349

7. BORWEIN, D.: **On a scale of Abel-type summability methods.**
Proc. Cambridge Phil. Soc. 52 (1959), 318-322

8. BORWEIN, D.: **On moment constant methods of summability.**
J. London Math. Soc. 35 (1960), 71-77

9. BORWEIN, D.: **A logarithmic method of summablity.**
J. London Math. Soc. 33 (1958), 212-220

10. BORWEIN, D., WATSON, B.: **Tauberian theorems on a scale of Abel-type summability methods.**
J. Reine Angew. Math. **298** (1978), 1-7

11. BORWEIN, D., WATSON, B.: **Tauberian theorems between the logarithmic and Abel-type summability methods.**
Pacific J. Math. **101** (1982), 11-22

12. BIRINDELLI, C.: **Contributo all' analisi dei metodi di sommazione di Gronwall.**
Rend. Circ. mat. Palermo **61** (1938), 157-176

13. BUSTOZ, J.: **On the relation between [f,g] and A_λ summability.**
Can. J. Math. **26** (1974), 783-793

14. BUSTOZ, J., WRIGHT, D.: **On Gronwall Summability.**
Math. Z. **125** (1972), 177-183

15. FEKETE, M.: **On the absolute summability (A) of infinite series.**
Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **3** (1932), 132-134

16. FISCHER, H.: **Gronwall Verfahren.**
Diplomarbeit, Fernuniversität Hagen (1981)

17. FLETT, T. M.: **On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley.**
Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 113-141

18. GRONWALL, T. H.: **Summation of series and conformal mapping.**
Ann. Math. (2) **33** (1932), 101-117

19. HARDY, G. H.: **Divergent Series.**
At the Clarendon Press, Oxford (1949) (bericht. Nachdruck 1973)

20. HOISCHEN, L.: **Some inclusion theorems for generalized Abel and Borel summability**
J. London Math. Soc., **42** (1967), 229-234

21. HOLZER, L.:
Deutsche Mathematik 4 (1939), 190-193

22. ISHIGURO, K.: **On summability methods of logarithmic type.
Proc. Japan Acad. 38 (1962), 703-705**

23. JEYARAJAN, P. A.: **A tauberian theorem for the generalized Abel method of summability (II)
Indian. J. Math. 14 (1972), 9-14**

24. JEYARAJAN, P. A.: **A tauberian theorem for the generalized Abel method of summability (II) - Addendum and Corrigendum
Indian J. Math. 16 (1974), 189-193**

25. KNOPP, K.: **Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.
Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage (1964)**

26. KUTTNER, B.: **Note on a scale of Abel-type summability methods.
J. Reine Angew. Math. 298 (1978), 218-220**

27. MISHRA, B. P.: **Absolute summability of infinite series on a scale of Abel-type summability methods.
Proc. Cambridge Phil. Soc. 64 (1968), 377-387**

28. MISHRA, B. P.: **Strong summability of infinite series on a scale of Abel-type summability methods.
Proc. Cambridge Phil. Soc. 63 (1967), 119-127**

29. RAJAGOPAL, C. T.: **On tauberian theorems for generalized Abel-summability.
Indian J. Math., 14 (1972), 91-103**

30. SRIDHAR, S.: **On a generalized Abel summability method.
Simon Stevin 56 (1982), 263-265**

31. SZASZ, O.: **On the product of two summability methods.
Ann. Soc. Polon. Math. 25 (1953), 75-84**

32. TITCHMARSH, E. C.: **The theory of functions.**
Oxford, 2. Auflage (1939)

33. ZELLER, K., BEEKMANN, W.: **Theorie der Limitierungsverfahren.**
Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage (1970)

34. ZIV, A.: **A Non-Equivalence Theorem for power methods of limitation.**
Math. Z. 139 (1974), 199-203

35. BORWEIN, D., RIZVI, J. H.: **On Abel-type methods of summability.**
J. Reine Angew. Math. 247 (1971), 139-145

SYMBOL- UND ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

Potenzreihenverfahren - allgemein

Potenzreihenverfahren - speziell

— Abel-Verfahren

— logarithmische Verfahren

Randfunktionen und Limitierung

Allgemeine Symbole

$[\alpha] := \max(\nu\in\mathbb{Z} \mid \nu\leq\alpha)$ (Gauß'sche Klammer)

$c^{\uparrow k} := c(c+1)\cdots(c+k-1)$ für $k>0$, $c\in\mathbb{C}$

$c^{\uparrow 0} := 1$

$c^{\downarrow k} := c(c-1)\cdots(c-k+1)$ für $k>0$, $c\in\mathbb{C}$

$c^{\downarrow 0} := 1$

$BV([0,1])$ (Funktionen beschränkter Variation auf $[0,1]$)

$E := \{ z\in\mathbb{C} \mid |z|<1 \}$ (offene Einheitskreisscheibe)

& (Beweisenden)

Kontakt: hieronymus.fischer@gmx.de